

## The Project Gutenberg eBook of Paul Appell: Biographie, Bibliographie Analytique des Écrits, by Ernest Lebon

This ebook is for the use of anyone anywhere in the United States and most other parts of the world at no cost and with almost no restrictions whatsoever. You may copy it, give it away or re-use it under the terms of the Project Gutenberg License included with this ebook or online at [www.gutenberg.org](http://www.gutenberg.org). If you are not located in the United States, you'll have to check the laws of the country where you are located before using this eBook.

Title: Paul Appell: Biographie, Bibliographie Analytique des Écrits

Author: Ernest Lebon

Release date: November 16, 2011 [EBook #38034]

Language: French

Credits: Produced by Laura Wisewell, Eleni Christofaki and the Online Distributed Proofreading Team at <http://www.pgdp.net> (The original copy of this book was generously made available for scanning by the Department of Mathematics at the University of Glasgow.)

\*\*\* START OF THE PROJECT GUTENBERG EBOOK PAUL APPELL: BIOGRAPHIE,  
BIBLIOGRAPHIE ANALYTIQUE DES ÉCRITS \*\*\*

### Note sur la Transcription

Les erreurs clairement introduites par le typographe ont été corrigées. Une [liste](#) d'autres corrections faites se trouve à la fin du livre. Pour les voir dans le texte, faites glisser votre souris, sans cliquer, sur un mot souligné en pointillés rouges.

## PAUL APPELL

### PRINCIPAUX OUVRAGES DE M. ERNEST LEBON.

Chez M. Gauthier-Villars, Quai des Grands-Augustins, 55, Paris.

**Histoire abrégée de l'Astronomie.** Petit in-8, en caractères elzéviens, titre en deux couleurs, avec 16 portraits et 1 Carte du Ciel; 1899 (*Ouvrage couronné par l'Académie Française*). 8 fr.

**Théorie et Application des Sections homothétiques de deux quadriques.** Grand in-8, avec 9 figures; 1884. 2 fr.

SAVANTS DU JOUR: *Biographie, Bibliographie analytique des Écrits*. Grand in-8 (28-19), papier de Hollande, avec un portrait en héliogravure (*Collection honorée d'une Souscription de l'Académie des Sciences*):

**Henri Poincaré**, 1 vol. de VIII-80 p., 1<sup>er</sup> Juillet 1909. 7 fr.

**Gaston Darboux**, 1 vol. de VIII-72 p., 10 Janvier 1910.

7 fr.

**Émile Picard**, 1 vol. de VIII-80 p., 1<sup>er</sup> Juin 1910.

7 fr.

---

Chez MM. Delalain Frères, Boulevard Saint-Germain, 115, Paris.

**Traité de Géométrie Descriptive** (comprenant la **Géométrie Cotée**). 2 vol. grand in-8.

I<sup>er</sup> VOLUME. *Classe de Mathématiques*, 286 épures dans le texte; 3<sup>e</sup> éd., 1901.

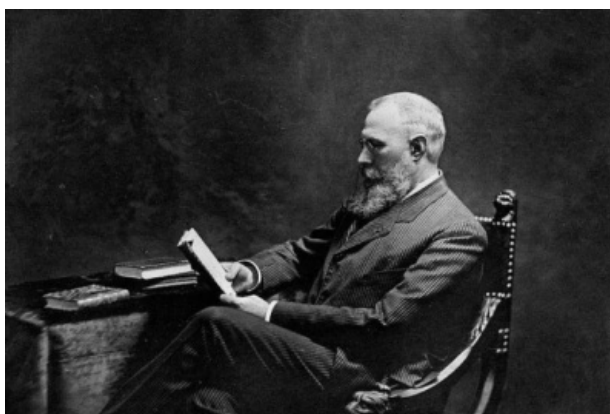
5 fr.

II<sup>e</sup> VOLUME. *Classe de Mathématiques spéciales*, 199 épures dans le texte, 1 Atlas in-8 de 14 planches in-4 gravées; 1882.

12 fr.

**Table de Caractéristiques relatives à la base 2310 des Facteurs Premiers d'un nombre inférieur à 30030.** Gr. in-8, 12 pages de texte, 20 Tableaux; 1906 (*Ouvrage honoré d'une Subvention de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences*).

1 fr.50



*Héliog. Dujardin*

*Phot. Pirou*

*Imp. Ch. Wittman*

## SAVANTS DU JOUR

---

# PAUL APPELL,

BIOGRAPHIE,  
BIBLIOGRAPHIE ANALYTIQUE DES ÉCRITS,

PAR

**Ernest LEBON,**

Agrégé de l'Université,  
Lauréat de l'Académie Française,  
Membre des Académies de Lisbonne et de Metz,  
et de la Société royale des Sciences de Liège.



PARIS,  
 GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
 DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
 Quai des Grands-Augustins, 55.

10 NOVEMBRE 1910.  
 (Tous droits réservés.)

## TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
Abréviations	VI
<b>SECTION I.—BIOGRAPHIE.</b>	
Notice sur M. PAUL APPELL	1
Grades. Fonctions. Titres honorifiques. Prix. Décorations	11
<b>SECTION II.—ANALYSE MATHÉMATIQUE.</b>	
Rapport de CH. HERMITE sur le Mémoire présenté par M. PAUL APPELL au Concours ouvert par le Roi OSCAR II	15
Ouvrages	20
Mémoires. Notes: <i>Analyse pure: 1<sup>o</sup> Fonctions d'un point analytique; 2<sup>o</sup> Séries, Intégrales définies, Généralités sur les fonctions d'une variable; 3<sup>o</sup> Fonctions périodiques et doublement périodiques d'une variable, Périodicité générale; 4<sup>o</sup> Fonctions de plusieurs variables, Fonctions abéliennes, Fonctions de deux variables à 2, 3 ou 4 paires de périodes, Fonctions hypergéométriques de deux variables, Inversion des intégrales multiples; 5<sup>o</sup> Équations différentielles ordinaires, Invariants; 6<sup>o</sup> Équations aux dérivées partielles, Potentiels triplement périodiques, Potentiels multiformes.—Analyse appliquée à l'Algèbre</i>	21
Article	38
<b>SECTION III.—GÉOMÉTRIE.</b>	
Rapport de M. GASTON DARBOUX sur le Prix BORDIN en 1885	39
Mémoires. Notes: <i>Géométrie infinitésimale. Géométrie analytique</i>	42
Article	45
<b>SECTION IV.—MÉCANIQUE RATIONNELLE ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.</b>	
Ouvrages	46
Mémoires. Notes: <i>Mécanique rationnelle. Physique mathématique</i>	51
<b>SECTION V.—HISTOIRE DES SCIENCES.</b>	
Discours. Discours nécrologiques. Notices nécrologiques. Rapports. Articles.	60
<b>SECTION VI.—ÉDUCATION ET ENSEIGNEMENT.</b>	
Discours. Conférence. Rapports. Articles	63

## ABRÉVIATIONS.

- AAWB *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Berlin, in-4.
- AB *L'Aérophile.* Revue mensuelle illustrée de l'Aéronautique et des Sciences qui s'y rattachent. Directeur-Fondateur: GEORGES BESANÇON. Paris, in-4.
- AEN *Association amicale de Secours des anciens Élèves de l'École Normale supérieure.* Paris, H., in-8.
- AFAS *Comptes rendus des Sessions de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences.* Paris, rue Serpente, 28, gr. in-8.
- AFSMa *Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.* Paris, G. M., in-4.
- AFST *Annales de la Faculté des Science de l'Université de Toulouse* pour les Sciences mathématiques et les Sciences physiques. Paris, G.-V., in-4.
- AJM *American Journal of Mathematics*, edited by FRANK MORLEY, published under the Auspices of the JOHNS HOPKINS University. Baltimore, in-4.
- AM *Acta Mathematica.* Journal fondé et rédigé par G. MITTAG-LEFFLER. Berlin, Stockholm; Paris, Hn., in-4.
- AMB *Annali di Matematica pura ed applicata* già diretti da FRANCESCO BRIOSCHI, continuati dai Prof. L. BIANCHI,... Milano, C. R., in-4.
- AMLB *Annuaire des Mathématiciens*, 1901-1902, publié sous la direction de C.-A. LAISANT et AD. BUHL. Paris, C. N., 1902, puis G.-V., in-16.
- AMPG *Archiv der Mathematik und Physik*, Gegründet 1841 durch. J.-A. GRUNERT, Her. von E. LAMPE,... Leipzig, B. G. T., gr. in-8.
- ASAPP *Annaes scientificos da Academia polytechnica do Porto*, publicados sobra direcção de F. GOMES TEIXEIRA. Coïmbre, gr. in-8.
- ASEN *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure.* Paris, G.-V., in-4.
- BAES *Bulletin trimestriel de l'Association des Élèves de Sèvres.* Paris, F.-D., gr. in-8.
- BAMS *Bulletin of the American mathematical Society.* Lancaster, PA., and New York, the MACMILLAN Society, 2<sup>d</sup> s., in-8.
- BBA *Bulletin de la Bibliothèque américaine (Amérique latine).* Paris, H., in-8.
- BBSL *Bollettino di Bibliografia et Storia delle Scienze matematiche*, pubblicato par cura di GINO LORIA, Torino, C. C., gr. in-8.
- BSFB *Bulletin scientifique de la France et de la Belgique*, publié par ALFRED GIARD. Paris, Laboratoire d'Évolution des Êtres organisés, 3, rue d'Ulm, gr. in-8.
- BSM *Bulletin des Sciences mathématiques*, fondé en 1870 par GASTON DARBOUX, publié par GASTON DARBOUX, ÉMILE PICARD et JULES TANNERY. De 1870 à la fin de 1884, le titre fut *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* Paris, G.-V., gr. in-8.
- BSMF *Bulletin de la Société mathématique de France.* Paris, G.-V., gr. in-8.
- BSP *Bulletin de la Société philomathique de Paris.* Paris, S., de 1864 à 1888, in-8; ensuite gr. in-8.
- CMF *Časopis pro peštování matematiky a fysiky*, redigu jí K. PETR, BOH. KUČERA. Praze, B. STÝBLA, gr. in-8.
- CR *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences.* Paris, G.-V., in-4.
- ECC *Affaire DREYFUS. La Revision du Procès de Rennes. Enquête de la Chambre criminelle de la Cour de Cassation*, 5 mars-19 novembre 1904. Paris, Ligue des Droits de l'Homme, 1, rue Jacob, 1908, 1909, gr. in-8.
- EM *L'Enseignement mathématique* dirigé par C.-A. LAISANT et H. FEHR. Paris, G.-V., et Genève, GEORG, gr. in-8.
- ESMEF *Encyclopédie des Sciences pures et appliquées.* Édition française publiée d'après l'édition allemande sous la direction de JULES MOLK. Paris, G.-V., gr. in-8.
- IdM *Idées modernes*, Revue mensuelle. Paris, D. P., gr. in-8.
- IF *Institut de France.* Paris, F.-D., in-4.
- IM *L'Intermédiaire des Mathématiciens* fondé en 1894 par C.-A. LAISANT et ÉMILE LEMOINE. Paris, G.-V., in-8.
- IMB *Inauguration du Monument BICHAT et des nouveaux Instituts de la Faculté des Sciences de Nancy.* Nancy, 13 juin 1909, gr. in-8.
- JC *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* Beg. von A. L. CRELLE.

- Her. von K. HENSEL. Berlin, G. R., in-4.
- JEP *Journal de l'École Polytechnique*. Paris, G.-V., in-4.
- JFM *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Beg. von CARL OHRTMANN. Her. von EMIL LAMPE. Berlin, G. R., gr. in-8.
- JL *Journal de Mathématiques pures et appliquées* fondé par J. LIOUVILLE, rédigé par CAMILLE JORDAN. Paris, G.-V., in-4.
- JO *Journal Officiel de la République Française*. Paris, 31, quai Voltaire, in-4.
- JS *Journal des Savants*. Paris, H., in-4.
- JST *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas* publicado pelo D<sup>f</sup> F. GOMES TEIXEIRA. Coïmbre, gr. in-8.
- LCD *Literarisches Centralblatt für Deutschland*. Beg. von FREDRICH BARNCKE. Her. von EDWARD BARNCKE. Leipzig, E. AVENARIUS, in-4.
- MA *Mathematische Annalen*. Beg. 1868 durch ALFRED CLEBSCH und CARL NEUMANN. Her. von FELIX KLEIN,... Leipzig, B. G. T., gr. in-8.
- MAWB *Monatsberichte der königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. Berlin, gr. in-8.
- MSAS *Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France*. Paris, I. N., in-4.
- MMP *Monatshefte für Mathematik und Physik*. Her. von G. v. ESCHERICH, F. MERTENS und W. WIRTINGER. Wien, J. EISENSTEIN, gr. in-8.
- Ms *Mathesis*. Recueil mathématique publié par P. MANSION et J. NEUBERG. Gand, Ad. HOSTE; Paris., G.-V., gr. in-8.
- NAM *Nouvelles Annales de Mathématiques*, fondées en 1842 par GÉRONO et TERQUEM, dirigées par C.-A. LAISANT, C. BOURLET et R. BRICARD. Paris, G.-V., in-8.
- NAW *Nieuw Archief voor Wiskunde* onder redactie van J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE. Amsterdam, DELSMAN en NOLTHENIUS, gr. in-8.
- NC *Il nuovo Cimento*, Organo della *Società italiana di Fisica*, pubblicato per cura dei Direttori.... Pisa, PIERACCINI, gr. in-8.
- NTM *Nyt Tidsskrift for Matematik*, Redigeret of C. JUEL og V. TRIER. Kobenhavn, JUL. GJELLERUP, in-8.
- ÖS *Öfversigt af kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*. Stockholm, P. A. NORSTEDT, in-8.
- RB *Revue Politique et littéraire, Revue bleue*, fondée par EUGÈNE YUNG. Directeur: FÉLIX DUMOULIN. Paris, 41 bis, rue de Châteaudun, in-4.
- RBB *Revue générale de Botanique*, dirigée par M. GASTON BONNIER, Paris, 1, rue DANTE, gr. in-8.
- RCMP *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*. Palermo, gr. in-8.
- RIE *Revue internationale de l'Enseignement* publiée par la Société de l'Enseignement supérieur. Rédacteur en chef: FRANÇOIS PICAUVET. Paris, 20, rue Soufflot, gr. in-8.
- RM *La Revue du Mois*. Directeur: ÉMILE BOREL. Paris, H. LE SOUDIER, gr. in-8.
- RMa Ministère de la Marine. *Revue Maritime*. Paris. R. CHAPELOT et C<sup>ie</sup>, gr. in-8. (Rédaction, 2, rue Royale.)
- RMS *Revue de Mathématiques spéciales*. Paris, N., in-4.
- RO *Revue générale des Sciences pures et appliquées*. Directeur: LOUIS OLIVIER. Paris, in-4.
- RQS *Revue des Questions scientifiques*, publiée par la Société scientifique de Bruxelles. Bruxelles; Louvain, à partir de 1896. 11, rue des Récollets, gr. in-8.
- RR *Revue scientifique. Revue rose*. Directeur de la rédaction: CH. MOUREU. Paris, 41 bis, rue de Châteaudun, in-4.
- SSS *Compte rendus du Congrès des Sociétés savantes de Paris et des départements, Section des Sciences*. Paris, 1. N., gr. in-8.
- UPR Académie de Paris. Conseil général des Facultés ou Conseil de l'Université de Paris, à partir de 1895-1896. *Rapports sur les travaux et les actes des Établissements d'Enseignement supérieur pendant l'année scolaire...* Paris, gr. in-8.
- WM *Wiadomosei matematyczne*. Rédigé en polonais. Rédacteur et éditeur: S. DICKSTEIN. Warszawa, Marszalkowska, 117, gr. in-8.
- ZMP *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. Her. von O. SCHLÖMILCH und M. CANTOR. Leipzig. B. G. T., gr. in-8.

aa.	aargang.	A. C.	Armand Colin.
Afd.	Afdeling.	B. G. T.	B. G. Teubner.
Abt.	Abteilung.	C. C.	Carlo Clausen.
Bd.	Band.	C. D.	Ch. Delagrave.
Beg.	Begründet.	C. N.	C. Naud.
c.	cahier.	C. R.	C. Rebeschini di Turati.
D.	Deel.	D.	Delalain Frères.
d. R.	dritte Reihe.	D. P.	Dunod et Pinat.

f.	fascicule.	F. A.	Félix Alcan.
Ht.	Heft.	F. D.	Firmin-Didot.
Her.	Herausgegeben.	G. C.	Georges Carré.
J.	Jahrgang.	G. M.	G. Masson.
Lit.	Literaturberichte.	G.-V.	Gauthier-Villars.
n. s.	nouvelle série, new series.	G. R.	Georg Reimer.
R.	Ročnick.	H.	Hachette et C <sup>ie</sup> .
T. R.	Tweede Reeks.	Hn.	A. Hermann; Hermann et Fils.
S.	Seite.	I. N.	Imprimerie nationale.
s.	série, series.	N.	Nony et C <sup>ie</sup> .

## PAUL APPELL

### SECTION I.

## BIOGRAPHIE.

### NOTICE SUR M. PAUL APPELL.

M. *Paul-Émile* APPELL naquit à Strasbourg, chef-lieu de l'ancien département du Bas-Rhin, le 27 septembre 1855. Son père, Jean-Pierre Appell, avait un atelier et un petit magasin de teinturerie place Saint-Étienne, au fond de la cour d'une maison appelée le *Ritterhus* en parler strasbourgeois, grande et ancienne construction surmontée de plusieurs étages de greniers auxquels on accède par un escalier de pierre tournant dans une tour: ce vieux bâtiment était rempli d'enfants qui se livraient à des jeux sans fin dans la cour ou dans les greniers. Le jeune PAUL APPELL fut mis au Collège Saint-Arbogast, dépendant de l'évêché, dirigé par un homme intelligent et bon, d'une haute conscience, d'un ardent patriotisme, l'abbé Uhrin. Les vacances se passaient au village natal de sa mère, Élisabeth Müller, *le Klingenthal*, situé dans une étroite et longue vallée des Vosges orientales, entre le mont Sainte-Odile et le Heidenkopf, toute remplie de la fraîcheur des eaux descendant de la montagne, et des bruits d'une fabrique d'armes blanches ayant appartenu à l'État Français de Louis XV à Louis-Philippe. Sa famille était profondément attachée à la France et aux idées de justice et de liberté mises en action par la Révolution Française. Son père, comme soldat français, dans une petite opération militaire en Corse, avait reçu au pied une blessure dont il souffrit toute sa vie. Son frère, Charles Appell, né d'un premier mariage, de 13 ans plus âgé que lui, s'engagea à 17 ans dans l'armée française: il prit part à la guerre d'Italie et fut envoyé, après la campagne, en congé de convalescence. Quand le père mourut, en 1869, ce frère aîné devint le conseiller et l'éducateur du jeune collégien, auquel il fit partager son amour passionné pour les longues courses dans les solitudes boisées des Vosges, pour les chasses patientes de la montagne et pour les chasses abondantes et faciles de la plaine d'Alsace. Il s'établit alors entre les deux frères une affection étroite, une tendresse virile chaque jour plus profonde. Pendant que le caractère de l'adolescent était ainsi développé vers l'action, l'influence d'une mère d'élite, réfléchie et laborieuse, douce mais obstinée, le poussait au travail régulier et persévérant.

Le Collège Saint-Arbogast ayant été fermé en 1868, le jeune PAUL APPELL passa un an en troisième au petit Séminaire de Strasbourg, et, pendant l'année scolaire 1869-1870, il suivit les cours de la classe de seconde du Lycée. La guerre ayant été alors déclarée, il vit arriver la belle armée d'Afrique, puis les sombres jours, la défaite et l'investissement. Sa famille était restée à Strasbourg pendant le siège; son frère, après avoir servi comme ambulancier volontaire sur le champ de bataille de Woerth, rentra à Strasbourg et s'engagea immédiatement dans la Compagnie de francs-tireurs commandée par Liès-Bodard, professeur à la Faculté des Sciences. PAUL APPELL, âgé de 14 ans, chercha à se rendre utile en aidant, dans une cantine provisoire, installée brasserie Piton, à nourrir de pauvres gens sans travail et sans ressources. Après la capitulation, tous les établissements d'enseignement étant fermés en Alsace, il fut envoyé au Klingenthal. Son frère Charles, sorti de la ville en échappant aux Allemands, put rentrer en France par le Hohwald et les Hautes Vosges, et reprit du service dans la légion d'Alsace-Lorraine; en 1871, il fut chargé en Alsace, par le Gouvernement de la Défense Nationale, d'une périlleuse mission, interrompue par l'armistice. Vinrent alors les événements les plus tristes de tous: l'élection des derniers députés d'Alsace-Lorraine, leur protestation à l'Assemblée

Nationale contre l'annexion, l'arrachement brutal des deux Provinces si attachées à la France. La famille Appell dut se séparer: la mère et le frère Charles restèrent en Alsace et devinrent officiellement allemands; le jeune PAUL prit un permis d'émigration et alla opter à Nancy pour la nationalité française. Dans ces séparations douloureuses qui déchirèrent alors toutes les familles alsaciennes et lorraines, on ne saurait dire quels sont ceux qui firent le sacrifice le plus grand et le plus utile, ceux qui partirent, ou ceux qui restèrent. M. PAUL APPELL a lui-même rappelé les sentiments de ses compatriotes dans le passage suivant, emprunté au toast qu'il porta au Banquet de l'Inauguration du Monument Bichat à Nancy, le 13 juin 1909:

«Messieurs, permettez-moi d'ajouter quelques mots à titre personnel. La ville de Nancy réveille en moi de douloureux et puissants souvenirs. Je ne puis oublier que c'est elle qui a accueilli, après la guerre, tant d'Alsaciens, parmi lesquels je me trouvais, jeune collégien, il y a 37 ans. Je vois à cette table un grand nombre de mes compatriotes, ayant passé par les mêmes souffrances. Nous nous sommes trouvés, au lendemain de la guerre, dans l'affreuse nécessité de déchirer notre personnalité: nous avons laissé à l'Alsace, à notre petite patrie, notre âme, ce qu'il y a dans l'homme de plus instinctif et de plus profond, nos plus délicats, nos plus intimes souvenirs d'enfance, et les tombes de ceux qui ne sont plus; et nous avons apporté à notre grande patrie, la France, tout notre cœur, toute notre énergie, toute notre volonté de consacrer nos forces à son relèvement, et une indestructible espérance..., une espérance que j'ai vue, ce matin, symbolisée sous mes yeux par le nom de Strasbourg inscrit sur le drapeau tricolore de vos étudiants.»

3

Au Lycée de Nancy, de Pâques aux grandes vacances de l'année 1872, M. PAUL APPELL eut, comme professeur de Mathématiques spéciales, M. Pruvost, qui, sous l'ignorance d'un écolier ayant travaillé seul, reconnut d'heureuses dispositions et les encouragea: M. P. APPELL lui en a gardé une grande reconnaissance. Pendant l'année scolaire 1872-1873, il suivit l'excellent cours de M. Elliot, successeur de M. Pruvost; il y fit la connaissance du jeune Henri Poincaré, avec qui il se lia d'une amitié que la vie a développée et fortifiée. Admis en 1873 à la fois à l'École Polytechnique et à l'École Normale, il entra, pour des raisons de famille, à l'École Normale, Section des Sciences. A la fin de la troisième année, le 20 juin 1876, il soutint une importante thèse de doctorat ès Sciences mathématiques. En sortant de l'École Normale, il fut reçu le premier, le 8 septembre 1876, à l'agrégation des Sciences mathématiques, et il remplit les fonctions de répétiteur d'Analyse et de Mécanique à l'École pratique des Hautes-Études. Le 1<sup>er</sup> mars 1878, il fut nommé maître de conférences de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Paris, et, du 11 novembre 1879 au 25 octobre 1881, il fut chargé du cours de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences de Dijon.

Le 4 juillet 1881, M. P. APPELL épousa M<sup>lle</sup> Amélie Bertrand, fille d'Alexandre Bertrand, conservateur du Musée de Saint-Germain-en-Laye, nièce de Joseph Bertrand et d'Hermite: il devenait ainsi le cousin par alliance de M. Émile Picard, son conscript à l'École Normale.

M. P. APPELL suppléa, en 1881-1882, Briot à l'École Normale et, en 1882-1883, V. Puiseux à la Sorbonne. Il fut nommé le 23 novembre 1886 professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences de Paris, après avoir été chargé de ce cours pendant deux ans.

En 1888, une grande douleur assombrit la vie de M. PAUL APPELL. Son frère Charles, poussé à de généreuses imprudences par son ardent amour de la France et par son désir de hâter l'heure de la «justice immanente», fut arrêté à Strasbourg, sous l'inculpation de haute trahison envers l'Empire Allemand; après une détention préventive qui fut un long martyre, il fut traduit devant la Haute-Cour de Leipzig, où son frère PAUL alla le soutenir de sa présence: il fut condamné à un an de prison et à neuf ans de forteresse. Le jugement rendait hommage à son ardent amour pour la France, «son ancienne patrie», et y trouvait des circonstances atténuantes. Le condamné subit la prison à Cottbus, puis la forteresse à Magdebourg, avec un courage et une dignité qui en imposèrent à tous ceux qui l'approchèrent; sa santé s'altérant gravement, sa peine fut interrompue en 1896, une année avant son terme régulier. Il revint alors en Alsace au Klingenthal, puis à Strasbourg; mais ni la liberté, ni l'air natal ne purent le rétablir: il passa de longs mois sans sortir, vivant de ses souvenirs, se distrayant à suivre de sa fenêtre la vie profonde de la vieille cathédrale qu'il avait vue, dans sa jeunesse, pavoisée aux couleurs françaises: il mourut en 1905<sup>(1)</sup>.

4

Trois années auparavant, M. PAUL APPELL avait eu la douleur de perdre sa mère qui, depuis 1878, avait quitté l'Alsace pour venir vivre auprès de lui.

Les premiers travaux de M. PAUL APPELL, faits sous l'influence de Michel Chasles, se rapportent à la Géométrie projective. En généralisant la théorie de l'involution, M. P.



APPELL a composé sa thèse de doctorat, soutenue le 20 juin 1876, qui a pour objet l'étude des propriétés des cubiques gauches à l'aide d'une relation involutive entre trois éléments et leur application au mouvement hélicoïdal d'un corps solide. A la fin de 1876, il a publié, dans un ordre d'idées analogue, la théorie des courbes gauches unicursales du quatrième ordre. Mais, à partir de 1877, en suivant les conseils de Bouquet, il s'adonna de préférence aux recherches sur l'Analyse mathématique.

En octobre 1878, M. P. APPELL donna le premier exemple de la détermination d'une singularité d'une fonction développée en série de MacLaurin, et il appliqua sa méthode au calcul d'une intégrale définie très générale relative aux séries hypergéométriques de Gauss. Il s'occupa ensuite, à des points de vue divers, des fonctions périodiques. En 1881 et en 1882, il publia une étude approfondie des fonctions périodiques générales, qui conservent la même valeur quand on fait sur la variable une opération fonctionnelle d'une certaine forme, ou qui se reproduisent, multipliées par une fonction donnée, quand on fait cette opération; il donna, comme applications, la théorie d'une classe de fonctions généralisant les fonctions eulériennes et une méthode d'intégration de certaines équations différentielles linéaires. A la fin de 1884, il exposa, pour le développement des fonctions elliptiques en séries trigonométriques, une méthode élémentaire qui a suggéré à M. H. Poincaré d'intéressantes remarques.

5

De 1882 à 1891, M. P. APPELL s'est occupé tout particulièrement des fonctions elliptiques et des fonctions doublement périodiques de deuxième et de troisième espèce, avec ou sans points singuliers essentiels. En 1884, 1885 et 1886, il a créé une certaine fonction qui sert d'élément simple dans la décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce; les résultats des recherches qu'il fit alors ont été exposés en 1886 par M. G.-A. Halphen dans son *Traité des Fonctions elliptiques*<sup>(2)</sup>, après avoir écrit cet éloge: «C'est M. APPELL qui, en créant le nouvel élément simple, a conduit cette partie de la théorie au plus haut degré de perfection.» Au début de l'année 1890, il a publié une méthode *a priori* pour représenter une fonction elliptique par le quotient de deux séries, que l'on peut ensuite ramener aux fonctions  $\Theta$  en appliquant un théorème démontré en 1887 par M. C. Guichard.

Dans la théorie générale des fonctions d'une variable, M. P. APPELL a donné en 1882 et développé en 1883 un théorème, souvent appliqué, sur le développement en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle. Il s'est occupé, en 1882, des fonctions uniformes d'un point sur une surface de Riemann et de leurs diverses expressions par l'intégrale de Cauchy, en faisant jouer à l'intégrale abélienne de seconde espèce le rôle que joue une certaine fonction dans la théorie relative à un seul feuillet; en 1884, il a étendu à ces fonctions uniformes des théorèmes dus à Weierstrass et à M. G. Mittag-Leffler. Aux recherches précédentes se rattache l'important Mémoire que M. P. APPELL a envoyé au Concours ouvert par le roi de Suède et de Norvège Oscar II, à l'occasion du 60<sup>e</sup> anniversaire de sa naissance, et qui a obtenu une Médaille d'Or le 21 janvier 1889, à la suite d'un élogieux Rapport de Charles Hermite. Après avoir exposé la question principale que visait l'Auteur «en entreprenant ces belles et profondes recherches où il a montré le plus remarquable talent d'invention», Ch. Hermite conclut que «le travail est l'œuvre d'un géomètre de premier ordre et qu'il sera placé au nombre des plus importantes productions mathématiques». La recherche des coefficients des développements des fonctions abéliennes en séries trigonométriques par des formules semblables à celles de Jacobi pour les fonctions elliptiques a souvent tenté les géomètres: M. P. APPELL, dans ce Mémoire, a donné, pour exprimer ces coefficients, des formules qui montrent bien la différence profonde entre les deux problèmes.

Une partie importante de l'œuvre analytique de M. P. APPELL a pour objet l'extension, qui offre souvent de grandes difficultés, à des fonctions de deux variables, de propositions et théories relatives aux fonctions d'une variable. Il importe de citer, dans cet ordre d'idées, les deux extensions suivantes qui ont été faites en 1882 et en 1883: d'abord, aux fonctions abéliennes, d'un théorème de Liouville sur les fonctions elliptiques; ensuite à une classe particulière de fonctions de deux variables, du théorème que M. G. Mittag-Leffler a fait connaître en 1876 sur les fonctions d'une variable. Après avoir découvert en 1880 les fonctions hypergéométriques de deux variables, M. P. APPELL fit l'étude analytique générale des équations simultanées aux dérivées partielles qui se rencontrent dans la théorie de ces fonctions: à l'aide de ces séries, il représenta les polynômes de Ch. Hermite et de nouveaux polynômes analogues à ceux de Jacobi; à ces séries, il a rattaché, en 1883, certaines formules de Hansen et de Tisserand; les polynômes correspondants lui ont permis d'étendre, en 1890, aux intégrales doubles la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales simples. Pour les fonctions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce, M. P. APPELL démontra, en 1890, que la célèbre relation de Riemann entre les périodes subsiste même si la fonction admet des points singuliers essentiels. En généralisant sa méthode, exposée en 1890, de représentation des fonctions elliptiques, il est parvenu à établir la théorie des fonctions de deux variables ayant quatre paires de périodes et dépourvues de singularités essentielles: d'abord il a montré *a priori* que ces fonctions s'expriment

6



par le quotient de deux fonctions  $\Theta$ , puis il en a déduit l'existence d'une relation algébrique entre trois de ces fonctions. Ces méthodes peuvent être étendues d'elles-mêmes aux fonctions de  $n$  variables à  $2n$  groupes de périodes. Enfin dans ce même domaine des fonctions  $\Theta$ , il a étudié une série d'exponentielles dont l'exposant est un polynôme du quatrième degré du rang  $n$ , et en a déduit des fonctions de trois variables admettant un groupe de substitutions linéaires entières. De ces profondes études il faut rapprocher des recherches relatives aux fonctions qui vérifient l'équation de Laplace. De 1883 à 1884, M. P. APPELL a établi, pour les fonctions harmoniques de trois variables réelles, une théorie qui est analogue à celle de la partie réelle des fonctions d'une variable complexe; il définit les pôles, les points singuliers essentiels de ces fonctions, auxquelles il étend le théorème de M. G. Mittag-Leffler. Il fait en particulier une étude des fonctions harmoniques à trois groupes de périodes, analogues à la partie réelle d'une fonction elliptique, qu'il exprime à l'aide d'un élément analytique construit comme la fonction  $Z$  de Ch. Hermite et la fonction  $\zeta$  de Weierstrass, élément dont il a de nouveau parlé en 1906. En 1884 et en 1886, il a donné des applications des fonctions harmoniques à divers problèmes de Physique mathématique.

M. P. APPELL a étendu, en 1880 et en 1881, aux équations différentielles linéaires et homogènes, les théorèmes relatifs aux fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique et à la transformation des équations algébriques. De 1882 à 1887, il a intégré une classe particulière d'équations différentielles linéaires binômes à coefficients algébriques et d'équations différentielles linéaires dont l'intégrale générale est méromorphe sur une surface de Riemann et dont les cycles sont permutable. Puis, dans son Mémoire couronné en 1889, il a classé les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques, dans le cas où l'intégrale générale n'admet, sur une surface de Riemann, d'autres singularités que des pôles et des points critiques logarithmiques, en généralisant la classification des intégrales abéliennes. Aux équations différentielles algébriques et homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées, mais non linéaires, il a montré que l'on peut étendre la théorie des invariants, d'abord en 1887, quand ces équations sont du premier ordre et définissent la dérivée comme fonction rationnelle de l'inconnue, puis, en 1889, quand elles sont du second ordre, homogènes et du second degré par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées première et seconde. Dans le domaine des équations différentielles aux dérivées partielles, il importe de citer l'extension, publiée en 1880, d'un théorème de Fuchs aux équations simultanées généralisant celles de la théorie des fonctions hypergéométriques ainsi que l'intégration, en 1882, d'une équation dont un cas particulier avait été rencontré par Euler dans ses recherches relatives à la propagation du son.

Le principal travail de M. P. APPELL en Géométrie infinitésimale est une étude approfondie du problème des déblais et des remblais, traité d'abord par Monge, proposé par l'Académie des Sciences comme question de Concours pour le prix Bordin. Le Mémoire que M. P. APPELL présenta fut couronné le 21 décembre 1885, conformément aux conclusions d'un beau Rapport de M. Gaston Darboux, qui s'exprime ainsi au cours d'une analyse remplie de précieux renseignements historiques: «C'est un travail de haute valeur où sont employés, alternativement et avec le plus grand succès, les ressources de la Géométrie et les méthodes de l'Analyse moderne».

M. P. APPELL fut amené par ses fonctions à faire une étude approfondie de la Mécanique rationnelle. Un théorème curieux, publié en décembre 1878 et relatif à l'interprétation des valeurs imaginaires du temps, lui permit de déduire d'une même intégration les deux mouvements que prend un système sous l'action de deux champs de force, égaux et de sens opposés. Dans une Note et un Mémoire, parus en 1886 et en 1888, il a ramené l'intégration des équations du mouvement d'un fil flexible et inextensible dans un plan à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre. Le 4 février 1889, M. P. APPELL a, le premier, proposé d'employer en Mécanique la méthode, si féconde en Géométrie, de transformation des figures par projection centrale. Ses travaux poursuivis en 1890, 1892 et 1895 ont suggéré les recherches de plusieurs géomètres, notamment de MM. E. Goursat, Paul Painlevé, P. Staedel et S. Dautheville. Enfin, en 1890 et en 1892, il a établi, dans la théorie de la chaleur, des propositions ayant pour but principal la recherche, quand elle est possible, des états antérieurs.

Toutes ces remarquables recherches attirèrent l'attention de l'Académie des Sciences; M. P. APPELL, après avoir obtenu le prix Bordin en 1885 pour son Mémoire sur les déblais et les remblais, les prix Poncelet en 1887 et Petit d'Ormoy en 1889 pour l'ensemble de ses travaux, fut élu, le 7 novembre 1892, membre de ce corps savant, dans la Section de Géométrie. Pendant les années qui suivirent cette élection, il continua ses recherches en Analyse pure et en Analyse appliquée à la Mécanique.

On sait quelle est l'importance du problème de l'inversion des intégrales simples: en 1897, M. P. APPELL a montré comment on peut définir le problème de l'inversion

des intégrales doubles et multiples, par la considération d'un champ d'intégration dépendant de plusieurs paramètres variables.

Les équations de Lagrange ne sont applicables qu'aux systèmes, dits *holonomes*, dont les liaisons s'expriment en termes finis. M. P. APPELL a donné, le 28 août 1899, une autre forme générale des équations de la Dynamique s'appliquant à tous les systèmes sans frottement, holonomes ou non, et reposant sur l'emploi de l'énergie d'accélération à la place de l'énergie de vitesse. Les études, publiées en 1903 et en 1909, sur les fonctions ayant des significations indépendantes du choix des axes, l'ont conduit à d'importants résultats relatifs aux fonctions et aux vecteurs de points en Hydrodynamique et au problème du mouvement d'un fil. Au Congrès des Sociétés savantes, en 1910, il a donné une équation fonctionnelle pour l'équilibre d'une masse liquide en rotation et soumise à l'attraction newtonienne. La question du problème de l'extinction du frottement, dans le cas d'un système matériel présentant certains caractères réalisés dans la plupart des systèmes usuels, a été signalée par M. P. APPELL dans un Discours prononcé, le 4 août 1905, au Congrès tenu à Cherbourg par l'Association Française pour l'Avancement des Sciences; puis résolue d'une manière précise dans deux Notes, parues en 1907, qui peuvent être regardées comme le point de départ d'intéressantes recherches se rapportant à la Mécanique et à la Physique. Il convient de signaler encore les extensions, faites en 1892 et en 1893, des équations de Lagrange au cas où il y a frottement et à la théorie du choc et des percussions; l'intégration, faite en 1899, des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal; les recherches, publiées en 1899 et en 1904, sur l'équilibre d'un flotteur avec un chargement liquide et sur la théorie d'un appareil à déterminer la position et la masse des balourds. Tous ces travaux de M. P. APPELL ont trouvé leur place dans son *Traité de Mécanique rationnelle*, dont la publication a été commencée en 1893: les diverses éditions des trois volumes de cet Ouvrage, qui est très apprécié, sont analysées au début de la IV<sup>e</sup> Section de cet Opuscule.

9

Le 1<sup>er</sup> avril 1903, M. P. APPELL fut élu Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris et, en 1904, membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique; de plus, il fait partie de la section permanente de ce Conseil. Ces fonctions absorbantes l'ont contraint à consacrer la plus grande partie de son activité à l'étude des questions relatives à l'organisation de l'Enseignement supérieur en France. Ses idées sur l'éducation et les études sont exposées dans plusieurs Discours et Articles, et, plus particulièrement, d'abord dans la Conférence sur l'Enseignement supérieur des Sciences, qu'il a faite, en février 1904, à l'École des hautes études sociales et qui a été suivie d'une intéressante discussion résumée par M. Clément Colson; ensuite dans un long Rapport que la Commission interministérielle des Grandes Écoles approuva en juillet 1904 et dont les diverses résolutions ont été appliquées dans les Programmes de l'Enseignement secondaire. En outre, depuis 1906, M. P. APPELL s'est efforcé d'établir des relations cordiales et suivies entre les milieux savants Nationaux et Américains, en sa qualité de Président du Conseil de direction du Groupement des Universités et Grandes Écoles de France pour les rapports avec l'Amérique latine.

M. PAUL APPELL a une attitude bienveillante et une physionomie ouverte qui inspirent la confiance absolue et qui engagent à s'ouvrir complètement à lui. Comme il possède l'art de dénouer les liens d'une affaire compliquée, il rend, pour les questions administratives les plus délicates, de grands services aux Conseils et aux Ministères qui sollicitent son avis. Lorsqu'il enseigne, il expose avec tant de clarté les points les plus difficiles des théories que ses auditeurs, en sortant du cours, se croient capables de répéter, immédiatement et sans embarras, les explications qu'ils ont entendues. Aimant la jeunesse laborieuse et gaie, il accueille toujours avec cordialité les étudiants qui viennent demander un renseignement ou un conseil. Il a beaucoup lu: toutes les productions de l'esprit l'intéressent. En Sciences, hors de l'Analyse et de la Mécanique qui sont l'objet de ses recherches favorites, il s'occupe tout spécialement de Géologie et d'Astronomie.

La vie de M. PAUL APPELL a toujours été d'une extrême simplicité, en rapport avec les traditions alsaciennes; on peut dire qu'elle a été partagée entre deux sentiments: l'amour du travail et de l'action scientifique, le désir passionné de voir de nouveau réunies sa grande et sa petite patrie, la France et l'Alsace. Tous les ans, pendant les grandes vacances, il va se reposer et songer dans le pittoresque pays alsacien où son enfance s'est écoulée heureuse, dans les forêts des Vosges dont il a pénétré le charme grave et profond, en chassant avec son malheureux frère, et qu'il aime maintenant à parcourir en promeneur et à faire connaître à ses amis de France.

10

E. L.

## NOTES.

<sup>1</sup> CHARLES APPELL est né à Strasbourg le 20 avril 1842, place Saint-Étienne, dans la maison appelée le *Ritterhus*. Il a été arrêté le 27 janvier 1888, condamné le 9 juillet

1888 à 1 an de prison, 9 ans de forteresse et à 10 260 marks de frais de justice. Mis en liberté le 20 décembre 1896, un an avant l'expiration de sa peine, il est mort le 22 mars 1905. Le Musée de Strasbourg contient son portrait dû au peintre Alsacien BEYER. On trouve de nombreux détails sur la vie de CHARLES APPELL dans les Journaux suivants:

*Journal d'Alsace-Lorraine*, Strasbourg, 23 et 25 mars 1905; 27 mars 1905, petite édition du Lundi (avec un portrait),

*Strassburger Bürger-Zeitung*, 23 mars 1905.

*Le Messager d'Alsace*, Paris, 60, rue de La Rochefoucauld, 25 mars 1905 (avec un portrait), 1<sup>er</sup> avril, 8 avril (avec un portrait), 15 avril 1905 (avec l'Arrêt de la Haute-Cour de Leipzig).

*Le Temps*, Paris, 24 mars 1905.

*L'Écho de Paris*, Paris, 27 mars 1905.

<sup>2</sup> *Traité des Fonctions elliptiques et de leurs Applications*, par G.-H. HALPHEN, Paris G.-V., 1<sup>re</sup> P., 1886, gr. in-8, p. 468-483.

## GRADES. FONCTIONS. TITRES HONORIFIQUES. PRIX. DÉCORATIONS.

11

PAUL-ÉMILE APPELL,

Né à Strasbourg (Bas-Rhin, France) le 27 septembre 1855.

Élève au Collège SAINT-ARBOGAST, à Strasbourg, de 1864-1868.

Élève au petit Séminaire de Strasbourg, pendant l'année scolaire 1868-1869.

Élève au Lycée de Strasbourg, pendant l'année scolaire 1869-1870.

Élève en Mathématiques spéciales au Lycée de Nancy, pendant l'année scolaire 1872-1873.

Bachelier ès Lettres, *reçu* à Nancy, le 9 novembre 1871.

Bachelier ès Sciences, *reçu* à Nancy, le 14 novembre 1871.

*Admis le second* à l'École Normale supérieure, Section des Sciences, le 11 août 1873 et le *troisième* à l'École Polytechnique, le 14 octobre 1873.

Élève à l'École Normale supérieure, Section des Sciences, pendant la période triennale d'octobre 1873 à août 1876.

Licencié ès Sciences mathématiques, *reçu* le 8 juillet 1875.

Licencié ès Sciences physiques, *reçu* le 25 juillet 1875.

Docteur ès Sciences mathématiques de la Faculté des Sciences de Paris, *reçu* le 20 juin 1876.

Agrégé des Sciences mathématiques, *reçu le premier* le 8 septembre 1876.

*Chargé* des fonctions de répétiteur d'Analyse et de Mécanique à l'École pratique des Hautes-Études, Section des Sciences mathématiques, le 14 septembre 1876.

Maître de Conférences de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Paris, du 1<sup>er</sup> mars 1878 à la fin de l'année scolaire 1878-1879.

*Chargé* du Cours de Mécanique rationnelle et appliquée à la Faculté des Sciences de Dijon, du 11 novembre 1879 au 25 octobre 1881.

Suppléant de M. BRIOT à l'École Normale supérieure pour les Conférences de Mécanique et d'Astronomie pendant l'année scolaire 1881-1882.

*Chargé*, à la Faculté des Sciences de Paris, de Conférences préparatoires à l'Agrégation des Sciences mathématiques, du 16 décembre 1881 au 15 mars 1883.

Maître de Conférences de Mécanique et d'Astronomie à l'École Normale supérieure, *nommé* le 17 octobre 1882.

Suppléant de M. V. PUISEUX à la Faculté des Sciences de Paris pour le Cours d'Astronomie mathématique et de Mécanique céleste, pendant le second semestre de l'année scolaire 1882-1883.

12

*Autorisé* à se faire suppléer par M. E. PICARD à l'École Normale supérieure, pour les Conférences de Mécanique et d'Astronomie, du 25 février 1883 au 30 novembre 1885.

*Chargé* du Cours de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences de Paris, le 10 novembre 1883.

Professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences de Paris, *depuis* le 23 novembre 1885.

M. P. APPELL, professeur de Mécanique rationnelle à la Sorbonne, et M. P. PAINLEVÉ, professeur de Mathématiques générales à la Sorbonne, *ont été autorisés* à échanger leur enseignement du 19 octobre 1903 au 1<sup>er</sup> novembre 1910.

Membre de la Commission de patronage de l'École pratique des Hautes-Études, Section des Sciences mathématiques, *depuis* le 16 janvier 1901.

Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, *depuis* le 1<sup>er</sup> avril 1903.

Membre du Conseil académique de Paris et du Conseil de l'Université de Paris, au titre de Doyen de la Faculté des Sciences, *depuis* le 1<sup>er</sup> avril 1903.

Membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique, *délégué* par les Facultés des Sciences, *depuis* le 31 mai 1904. Membre de la Section permanente de ce Conseil *depuis* le 21 juin 1904.

*Chargé* de Conférences de Mathématiques à l'École Normale supérieure d'Enseignement secondaire pour les Jeunes Filles, à Sèvres, *depuis* le 13 novembre 1884.

Répétiteur de Mécanique à l'École Polytechnique, *nommé* auxiliaire le 1<sup>er</sup> décembre 1890, *nommé* adjoint le 30 mai 1895. Démissionnaire le 31 janvier 1909.

Examinateur d'Admission à l'École Centrale des Arts et Manufactures, session de 1894.

Professeur d'Analyse mathématique à l'École Centrale des Arts et Manufactures, *depuis* le 1<sup>er</sup> novembre 1895.

Président du Jury d'Agrégation des Sciences mathématiques de 1894 à 1903.

Président du Jury d'Agrégation de Mathématiques de l'Enseignement secondaire des Jeunes Filles, *depuis* 1904.

Membre de l'Académie des Sciences (Institut national de France), à Paris, *élu*, dans la Section de Géométrie, le 7 novembre 1892.

Membre étranger de l'Académie royale des Lincei, à Rome, *élu* le 17 juillet 1904.

Membre de la Société Philomathique de Paris, *élu* le 9 mars 1878. Membre correspondant du 11 novembre 1879 au 31 décembre 1898.

Membre associé de l'Académie de STANISLAS, à Nancy, *élu* le 22 janvier 1904.

Docteur *honoris causâ* en Mathématiques de l'Université royale Frédéricienne de Christiania, *élu* le 6 septembre 1902.

Au Ministère de l'Instruction publique:

Membre du Comité des Travaux historiques et scientifiques, *nommé* le 7 mars 1893.

Membre du Comité consultatif des Sciences, *depuis* le 1<sup>er</sup> mai 1903.

Membre de la Commission relative au Baccalauréat de l'Enseignement secondaire, *nommé* le 6 juillet 1904.

Membre du Conseil des Observatoires de province, *depuis* sa création le 15 février 1907.

Membre de la Commission chargée d'élaborer un projet de statut pour le personnel auxiliaire (chef des travaux et préparateurs) et le personnel subalterne (mécaniciens et garçons) des Facultés, *nommé* 15 mars 1910.

A l'Université de Paris:

Membre du Conseil de l'Observatoire de Nice, *depuis* le 1<sup>er</sup> avril 1903.

Vice-Président du Conseil de perfectionnement de l'Institut aérotechnique, *depuis* mars 1910.

Membre de la Commission des Inventions intéressant les Armées de terre et de mer, au Ministère de la Guerre, *nommé* le 14 juin 1894.

Membre de la Commission d'Aéronautique, à l'Académie des Sciences, *élu* le 27 octobre 1902.

Membre du Conseil de perfectionnement de l'École Polytechnique, *délégué* du Ministère de l'Instruction publique, le 1<sup>er</sup> novembre 1907.

Membre du Comité de rédaction des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, *depuis* janvier 1882.

Directeur de la Section de Mécanique dans l'Édition Française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*, *depuis* 1904.

Président de la Société mathématique de France, en 1885.

Membre du Conseil d'Administration de l'Association amicale de Secours des anciens Élèves de l'École Normale supérieure, *élu* le 11 janvier 1891. Vice-Président de ce Conseil de 1900 à 1906. Président de ce Conseil de 1906 à 1908. Administrateur Honoraire *depuis* 1908.

Vice-Président du Congrès des Mathématiciens, tenu à Paris du 6 au 12 août 1900.

Vice-Président de la Société astronomique de France, à Paris, du 5 avril 1905 au 1<sup>er</sup> avril 1908.

Président de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences et du Conseil d'Administration, du 6 août 1907 au 8 août 1908. *Élu* Vice-Président le 7 août 1906. *Élu* Membre de la Commission permanente de Publication le 8 août 1908.

Président du Comité de direction du Groupement des Universités et Grandes Écoles de France pour les Rapports avec l'Amérique latine, *depuis* janvier 1907.

Président d'honneur de la Section Française de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique, *élu* le 1<sup>er</sup> mars 1909.

Vice-Président du Comité de direction de l'Office national des Universités et Écoles Françaises, *élu* le 15 juillet 1910.

Membre honoraire de la Société mathématique de Kharkow, *élu* le 12 octobre 1903 (v. s.).

Membre honoraire de la Société de Littérature et de Philosophie de Manchester, *élu* le 17 avril 1894.

Membre honoraire de la Société mathématique de Calcutta, *élu* le 28 janvier 1910.

Médaille d'Or dans le Concours international institué par S. M. le Roi de Suède et de Norvège OSCAR II, à l'occasion du 60<sup>e</sup> anniversaire de sa naissance, *décernée* le 21 janvier 1889.

*Décerné* par l'Académie des Sciences de l'Institut national de France:

Prix BORDIN (Géométrie), le 21 décembre 1885.

Prix PONCELET, le 26 décembre 1887.

Prix PETIT D'ORMOY, le 30 décembre 1889.

Officier d'Académie, *nommé* le 23 avril 1881.

Officier de l'Instruction publique, *nommé* le 30 décembre 1886.

Chevalier de la Légion d'honneur, *nommé* le 4 mars 1889.

Officier de la Légion d'honneur, *promu* le 31 décembre 1895.

Commandeur de la Légion d'honneur, *promu* le 30 novembre 1904.

SECTION II.

ANALYSE MATHÉMATIQUE.

RAPPORT DE M. CHARLES HERMITE SUR LE MÉMOIRE PRÉSENTÉ PAR M. PAUL APPELL AU CONCOURS OUVERT PAR S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE OSCAR II, ET RÉCOMPENSÉ D'UNE MÉDAILLE D'OR LE 21 JANVIER 1889.

Les expressions des fonctions elliptiques par des séries simples de sinus et de cosinus, telles que les donne la formule de FOURIER, ont, à bien des points de vue, une grande importance en Analyse. Elles ont été employées avec succès et jouent un rôle important dans beaucoup d'applications du calcul à la Physique et à l'Astronomie. Elles ont conduit JACOBI aux formules si remarquables du § 40 des *Fundamenta*, où le grand géomètre, allant au delà des propositions connues de l'Arithmétique, obtient le nombre de décompositions d'un entier quelconque en 2, 4, 6 et 8 carrés, exprimé au moyen des diviseurs de ce nombre. D'autres résultats, d'une nature plus cachée, sur le nombre des classes de formes quadratiques de déterminants négatifs, devaient encore découler de la même source analytique et mettre dans tout son jour l'étroite correspondance des identités de la théorie des fonctions elliptiques avec la théorie des nombres. Nous les rappelons succinctement pour faire comprendre quelles espérances on avait dû concevoir de la découverte mémorable de GÖPEL et ROSENHAIN, lorsqu'on eut, sous une forme entièrement semblable à celle des fonctions elliptiques, les fonctions quadruplement périodiques de deux variables, inverses des intégrales hyperelliptiques de première classe. Assurément il était possible de joindre aux expressions de ces nouvelles transcendentes, par des quotients de fonctions  $\Theta$ , des développements en séries simples de sinus et de cosinus; mais la détermination effective des coefficients présente les plus grandes difficultés et n'a pu jusqu'à présent être abordée. Elle est le principal objet du Mémoire dont nous allons analyser les méthodes et les résultats.

16

I. La solution donnée par JACOBI du problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, lorsqu'il n'y a pas de forces accélératrices, a été l'origine d'une notion analytique importante. Les expressions de l'illustre auteur présentent, en effet, dans le cas le plus simple, l'exemple de fonctions qui se reproduisent multipliées par des constantes lorsqu'on augmente la variable de l'une ou l'autre des périodes. On a reconnu qu'elles constituent un nouveau genre de fonctions, plus générales que les fonctions doublement périodiques, dont le rôle comme élément analytique propre se montre dans beaucoup de questions importantes. Elles s'offrent, en particulier, dans la rotation d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe, dans la recherche de la figure de l'élastique gauche, dans le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini, lorsqu'il n'y a pas de forces accélératrices, etc. Enfin elles donnent une méthode régulière, d'une application facile, pour effectuer l'intégration des équations différentielles linéaires d'ordre quelconque, à coefficients doublement périodiques, dans tous les cas où la solution est une fonction uniforme. Sous un autre point de vue, ces transcendentes peuvent encore être considérées comme provenant de l'intégrale elliptique la plus générale qui aura été mise en exponentielle, en y remplaçant la variable par un sinus d'amplitude. On peut aussi ne pas faire ce changement et conserver l'intégrale qui, suivant le contour décrit par la variable, est susceptible d'une infinité de déterminations. Ces valeurs multiples s'obtenant par l'addition de constantes, les expressions dont nous parlons auront la propriété de se reproduire, multipliées par des facteurs constants, lorsqu'on fait décrire certains chemins à la variable. Qu'au lieu de considérer la variable sur un plan unique on recoure à la conception de RIEMANN, de manière à remplacer, par une fonction à sens unique, affectée de coupures, une expression à déterminations multiples, on parvient à une quantité dont les valeurs, lorsqu'on passe d'un bord à l'autre de la coupure, se reproduisent multipliées par une constante. Nous nous trouvons ainsi amenés à l'idée fondamentale de l'auteur, à la notion analytique des nouvelles transcendentes, auxquelles il donne la dénomination de fonctions à multiplicateurs et dont il établit les propriétés; voici succinctement les résultats auxquels il est parvenu.

II. Son point de départ est dans la considération d'une équation algébrique de genre  $p$ , et de la surface correspondante de RIEMANN, rendue simplement connexe au moyen de coupures; ce sont les éléments qui lui permettent de définir d'une manière complète et précise les fonctions à multiplicateurs, d'après les conditions suivantes. Elles seront uniformes sur la surface, elles ne présenteront aucune autre singularité

17

que des pôles, et elles prendront aux deux bords infiniment voisins d'une coupure des valeurs qui ne diffèrent que par des multiplicateurs constants. Ceci posé, voici un premier résultat d'une grande importance: toutes les fonctions qui satisfont aux conditions posées, leurs multiplicateurs étant des constantes données d'avance, peuvent s'exprimer au moyen des intégrales normales de troisième espèce qui sont attachées à l'équation algébrique. Viennent ensuite plusieurs théorèmes; le suivant qui est une généralisation de la proposition célèbre d'ABEL, sur les intégrales de différentielles algébriques, mérite une attention particulière. Il consiste en ce que la somme des valeurs que prend une intégrale abélienne de première espèce, aux zéros d'une fonction à multiplicateurs, est égale à la somme des valeurs qui correspondent aux infinis de la même fonction, augmentée d'une constante dépendant uniquement des multiplicateurs. Après avoir déduit de là d'importantes conséquences sur le nombre des constantes arbitraires d'une fonction qui a des multiplicateurs et des pôles donnés, l'auteur démontre qu'il existe en général  $p-1$  relations entre les pôles et les résidus d'une fonction à multiplicateurs, et  $p$  dans un cas spécial, comprenant en particulier celui des fonctions algébriques. Ce cas spécial intéressant tient à l'existence d'une fonction sans zéros, ni infinis, et qui admet les multiplicateurs donnés.

III. Les intégrales de fonctions à multiplicateurs font ensuite le sujet d'une étude approfondie. L'auteur obtient, à leur égard, un ensemble de propositions qui correspondent exactement aux théorèmes célèbres de RIEMANN sur les intégrales abéliennes. Nous indiquerons, comme exemples, leur classification en intégrales de première espèce qui sont toujours finies, en intégrales de deuxième espèce n'ayant que des pôles, et en intégrales de troisième espèce où s'offrent des infinis logarithmiques. Nous citerons encore cette importante proposition, qu'en général il existe  $p-1$  intégrales de première espèce, linéairement indépendantes, et  $p$  dans le cas particulier dont il a été question précédemment. Les modules de périodicité de ces intégrales, le long des coupures, sont liés aux multiplicateurs par des relations qui deviennent identiques lorsque les multiplicateurs se réduisent à l'unité et que les intégrales deviennent abéliennes. Entre les modules de périodicité de deux intégrales de première espèce, à multiplicateurs inverses, existe une équation qui coïncide, dans le cas particulier des multiplicateurs égaux à l'unité, avec la relation d'une importance capitale découverte par RIEMANN, entre les modules de périodicité de deux intégrales abéliennes de première espèce. Enfin l'auteur forme les intégrales normales de fonctions à multiplicateurs de deuxième et de troisième espèce; il établit des relations entre les modules de périodicité de ces intégrales et leurs multiplicateurs, puis d'autres entre ces modules et ceux d'une intégrale de première espèce aux multiplicateurs inverses. L'ensemble de ces résultats rend manifeste l'analogie de la nouvelle théorie avec celle des intégrales abéliennes; la différence de nature analytique entre les deux genres de quantités apparaît toutefois dans cette circonstance, qu'il existe une intégrale de troisième espèce, avec un seul infini logarithmique, tandis qu'une intégrale abélienne de troisième espèce possède au moins deux infinis de cette nature. En dernier lieu, nous signalerons, dans la théorie des intégrales de deuxième espèce, ce théorème d'un grand intérêt, que toute fonction à multiplicateurs s'exprime par une somme d'intégrales de seconde espèce, ayant les mêmes multiplicateurs et devenant chacune infinie en un seul point. C'est, comme on le voit, la généralisation de la belle formule de RIEMANN-ROCH, qui représente une fonction algébrique quelconque par une somme d'intégrales abéliennes de deuxième espèce.

18

IV. Nous venons d'indiquer rapidement les points les plus essentiels de la théorie des fonctions à multiplicateurs. Nous avons montré qu'elle a pour première origine les fonctions algébriques, leurs propriétés et celles de leurs intégrales, telles que RIEMANN les a fait connaître; nous avons montré qu'elles constituent par l'ensemble de leurs caractères de nouveaux éléments analytiques où l'on retrouve, dans un sens beaucoup plus général, toutes les propriétés des fonctions doublement périodiques de deuxième espèce. Il nous faut maintenant revenir à la question principale que l'auteur a eue en vue en entreprenant ces belles et profondes recherches où il a montré le plus remarquable talent d'invention. Son but était d'obtenir les intégrales définies réelles qui représentent les coefficients des développements, par la formule de FOURIER, des fonctions elliptiques et des fonctions abéliennes de deux variables à quatre paires de périodes simultanées. Un changement de variables le conduit d'abord à des fonctions à multiplicateurs, et, pour le cas des sinus d'amplitude qu'il traite en premier lieu, ses principes généraux lui permettent d'obtenir les coefficients du développement avec autant de simplicité que d'élégance. En appliquant ensuite la même méthode aux transcendentes de GÖPEL et de ROSENHAIN, il trouve les coefficients sous la forme d'une fonction rationnelle des constantes  $p, q, r$  qui figurent dans les fonctions  $\Theta$  à deux variables, multipliée par une intégrale définie où entrent deux entiers indéterminés. C'est, pour la théorie des fonctions abéliennes, un résultat du plus haut intérêt: il donne la solution d'une question restée jusqu'ici inabordable, sous une forme qui permettra d'en poursuivre les conséquences; il ouvre la voie pour l'étude approfondie des développements par la formule de FOURIER, des fonctions abéliennes, et obtenir pour ces fonctions des développements procédant suivant les puissances des trois quantités  $p, q, r$ . On peut

19



donc attendre de voir ainsi se combler une grande lacune dans la théorie de ces transcendentes; on peut donc espérer de voir se rétablir, autant que le comporte la nature des choses, l'analogie avec les fonctions elliptiques, dans ce point d'une importance capitale où elles se lient aux propriétés des nombres. Pressé par la date fixée pour le terme du concours, l'auteur a dû ajourner ces recherches qui auraient pu devenir le couronnement de son beau et savant Mémoire. Mais il a grandement accompli sa tâche en posant les fondements d'une théorie qui ajoute au domaine de l'Analyse un nouveau genre de fonctions, dont il a encore indiqué une autre application importante à l'intégration des équations linéaires d'ordre quelconque à coefficients algébriques.

Nous pensons, en résumé, que le travail dont nous venons de faire l'exposé est l'œuvre d'un géomètre de premier ordre, et qu'il sera placé au nombre des plus importantes productions mathématiques qui aient appelé dans ces dernières années l'attention des analystes.

Paris, 10 Janvier 1889.

AM, t. 13, 1890, p. VII-XII.

Voir la Lettre de M. G. MITTAG-LEFFLER: C R, t. 108, 25 fév. 1889, p. 387.

## OUVRAGES.

20

### 1. NOTICE SUR LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES DE M. PAUL APPELL,

Rédigée par lui-même à l'appui de sa candidature comme membre de l'Académie des Sciences, dans la Section de Géométrie.

Paris, G.-V., in-4: 1<sup>re</sup> éd., 1884, 39 p.; 2<sup>e</sup> éd., 1889, 83 p.; 3<sup>e</sup> éd. 1892, in-4, 112 p.

### 2. THÉORIE DES FONCTIONS ALGÈBRIQUES ET DE LEURS INTÉGRALES, *par* PAUL APPELL ET ÉDOUARD GOURSAT.

*Étude des Fonctions analytiques sur une surface de RIEMANN.*

Paris, G.-V., 1895, gr. in-8, x-530 p.

Préface de CH. HERMITE: p. *a g.*

Présentation par M. P. APPELL à l'Académie des Sciences: C R, t. 120, 18 fév. 1895, p. 362-363.

Analyse par G. KOENIGS: RO, t. 4, 15 fév. 1893, p. 173-174.

Analyse par R. LE VASSEUR: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 18, 1<sup>re</sup> p., nov. 1894, p. 242-277.

Analyse par P. STAECKEL: J F M, Bd. 26, J. 1895, S. 416-425.

Analyse par ROBERT FRICKE: Z M P, 41. J., 1896, Abt., S. 94-100.

Analyse par ED. WEYR: C M F, R. 26, 1897, p. 241-246.

Analyse par C. JUEL: N T M, Afd. B., 8 aa., 1897, p. 91-93.

### 3. PRINCIPES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET APPLICATIONS, *par* P. APPELL ET É. LACOUR.

Paris, G.-V., 1897, gr. in-8, IX-421 p.

Présentation par M. P. APPELL des fasc. I et II à l'Académie des Sciences: C R, t. 122, 29 juin 1896, p. 1523-1524;—t. 123, 30 novembre 1896, p. 932.

Analyse par J. TANNERY: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 21, 1<sup>re</sup> p., fév. 1897, p. 50-55.

Analyse par P. STAECKEL: J F M, Bd. 28, J. 1897, S. 382-383.

Analyse: M M P, 8. J., 1897, Lit., S. 17-19.

Analyse par KOYGOWSKI: W M, t. 1, 1897, p. 118-119.

Analyse par ROBERT FRICKE: Z M P, 43. Bd., 1898, Abt., S. 140-143.

### 4. ÉLÉMENTS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE,

A l'usage des Ingénieurs et des Physiciens.

Cours professé à l'École Centrale des Arts et Manufactures.

21

Paris, G. C. et C. N., 10 août 1898, gr. in-8, VI-720 p.;—G.-V., 2<sup>e</sup> éd., 1905, gr. in-8, VII-714 p.

Analyse par A. G. GREENHILL: E M, 1<sup>re</sup> a., 15 janv. 1899, p. 66-72.

Analyse par GOMES TEIXEIRA: J S T, v. 13, 1897, p. 167-169.

Analyse par P. MANSION: R Q S, 2<sup>e</sup> s., t. 15, avr. 1899, p. 596-603.

Analyse par C. BOURLET: B S M, 2<sup>e</sup> s., 1<sup>er</sup> p., t. 23, juin 1899, p. 136-139, —t. 29, avr. 1905, p. 96.

Analyse: M M P, 10. J., 1899, Lit., S. 32-33.

Analyse par S. DICKSTEIN: W M, t. 3, 1899, p. 65-67.

Analyse par M. CANTOR: Z M P, 44. Bd., 1899, Abt., 5 u. 6 Ht., S. 153-155.

Analyse par P. H. SCHOUTE: N A W, T. R., D. 4, 1900, p. 158-160.

Analyse par H. LIEBMANN: A M P G, d. R., 12. Bd., 1907, S. 81-82.

## MÉMOIRES. NOTES.

### Analyse pure:

#### 1<sup>o</sup> Fonctions d'un point analytique.

1. *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques.*

Ce Mémoire a obtenu, le 21 janvier 1889, la Médaille d'Or accordée par S. M. le Roi de Suède et de Norvège, OSCAR II, à l'occasion du 60<sup>e</sup> anniversaire de sa naissance.

A M, t. 13, 1890, 174 p.

Rapport de CH. HERMITE: A M, t. 13, 1890, p. VII-XII.

Analyse par HURWITZ: J F M, Bd. 22, J. 1890, S. 412-418.

2. 3. *Sur les fonctions uniformes d'un point analytique  $(x, y)$ .*

C R, t. 94, 13 mars 1882, p. 700-703.

A M, t. 1, 1882-1883, 2 sept. 1882, p. 109-131, 132-144.

Analyse par J. TANNERY: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 8, 2<sup>e</sup> p., août 1884, p. 138-142.

4. *Théorèmes sur les fonctions d'un point analytique.*

C R, t. 95, 9 oct. 1882, p. 624-626.

5. *Sur une classe de fonctions dont les logarithmes sont des sommes d'intégrales abéliennes de première et de troisième espèce.*

C R, t. 92, 18 avr. 1881, p. 960-962.

6. *Relations entre les résidus d'une fonction d'un point analytique  $(x, y)$  qui se reproduit, multipliée par une constante, quand le point  $(x, y)$  décrit un cycle.*

C R, t. 95, 23 oct. 1882, p. 914-919.

7. *Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.*

J L, 3<sup>e</sup> s., t. 9, janv. 1883, p. 5-24.

Analyse: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 9, 2<sup>e</sup> p., janv. 1885, p. 20-21.

Analyse par HAMBURGER: J F M, Bd. 15, J. 1883, S. 412-413.

#### 2<sup>o</sup> Séries. Intégrales définies. Généralités sur les fonctions d'une variable.

8. *Sur certaines séries ordonnées par rapport aux puissances d'une variable.*

M. P. APPELL donne des exemples de cas où l'on peut reconnaître l'existence d'un pôle ou d'un point critique pour une fonction définie

par une série entière, et déterminer la partie principale.

C R, t. 87, 28 oct. 1878, p. 689-692.

**9. Évaluation d'une intégrale définie.**

Les intégrales évaluées par M. P. APPELL dans cette Note portent sur des fonctions hypergéométriques; elles comprennent, en particulier, la réduction de l'intégrale eulérienne de première espèce  $B(p, q)$  aux fonctions  $\Gamma$ , et les formules relatives aux polynômes qui naissent de la série hypergéométrique et qui ont été considérés par JACOBI.

C R, t. 87, 2 déc. 1878, p. 874-876.

**10. Sur la série hypergéométrique et les polynômes de JACOBI.**

M. P. APPELL indique quelques applications de l'intégrale définie dont il a donné l'expression dans la Note n<sup>o</sup> 9.

C R, t. 89, 7 juil. 1879, p. 31-38.

**11. Sur les séries divergentes à termes positifs.**

M. P. APPELL donne divers théorèmes sur les séries divergentes numériques et sur les séries ordonnées par rapport aux puissances d'une variable, généralisant ceux de la Note n<sup>o</sup> 8.

A M P G, 64. Teil, 16 sept. 1879, S. 387-392.

**12. Développement en série entière de  $(1 + ax)^{1/x}$ .**

A M P G, 65. Teil, 6 janv. 1880, S. 171-175.

Analyse par HOPPE: J F M, Bd. 12, J. 1880, S. 191-192.

**13. Développement en séries trigonométriques des polynômes de M. LÉAUTÉ.**

N A M, 3<sup>e</sup> s., t. 16, juin 1897, p. 265-268.

**14. Sur une classe de polynômes.**

M. P. APPELL étudie des polynômes  $P_n(x)$  de degré  $n$  tels que

$$\frac{dP_n}{dx} = nP_{n-1}.$$

Ces polynômes forment une classe spéciale comprenant les polynômes que CH. HERMITE a déduits de la différentiation de  $e^{-x^2}$  et les polynômes introduits par M. LÉAUTÉ pour le développement d'une fonction dont on connaît les valeurs moyennes des dérivées dans un intervalle. M. APPELL définit en même temps une opération fonctionnelle qui consiste à former le polynôme  $(PQ)_n$  obtenu en remplaçant, dans  $P_n$ , chaque puissance  $x^k$  par un polynôme  $Q_k(x)$ . Ces polynômes ont été rencontrés par M. PINCHERLE dans diverses recherches (A M B, s. 2, t. 12, 1888, p. 126).

A S E N, 2<sup>e</sup> s., t. 9, avr. 1880, p. 119-144.

Analyse par HAMBURGER: J F M, Bd. 12, J. 1880, S. 342-345.

Analyse: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 6, 2<sup>e</sup> p., janv. 1882, p. 6-9.

**15. 16. Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle.**

C R, t. 94, 1<sup>er</sup> mai 1882, p. 1238-1240.

M A, Bd. 21, 1883, 23 sept. 1882, S. 118-124.

Analyse par HAMBURGER: J F M, Bd. 15, J. 1883, S. 324-325.

**17. Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle.**

A M, t. 1, 1882-1883, p. 145-152.

**18. Sur certains développements en série de puissances.**

M. P. APPELL présente des remarques se rapportant aux Notes n<sup>os</sup> 16 et 17, sur le degré d'indétermination des coefficients.

B S M F, t. 11, 1882-1883, 18 fév. 1883, p. 65-71.

**19. Définition d'une opération sur les fonctions.**

Cette Note contient la définition d'une opération itérative d'ordre fractionnaire.

B S P, 7<sup>e</sup> s., t. 3, 1878-1879, 12 avr. 1879, p. 166.

**3<sup>e</sup> Fonctions périodiques et doublement périodiques d'une variable. Périodicité générale.**

**20. Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en série trigonométrique des fonctions elliptiques.**

B S M F, t. 13, 1884-1885, 6 déc. 1884, p. 13-18.

Remarques de M. H. POINCARÉ: B S M F, t. 13, 1884-1885, 20 déc. 1884, p. 19-27.

Analyse: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 10, 2<sup>e</sup> p., juin 1886, p. 140-141, 141-142.

**21. Sur un problème d'interpolation relatif aux fonctions elliptiques.**

B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 10, 1<sup>re</sup> p., mai 1886, p. 109-114.

**22. Sur les fonctions elliptiques.**

M. P. APPELL définit les fonctions elliptiques *in abstracto* et expose leur réduction aux fonctions  $\Theta$ . Cette méthode peut être étendue aux fonctions de deux variables (Voir n<sup>os</sup> 51 et 52, p. 28).

C R, t. 110, 6 janv. 1890, p. 32-34.

**23. Sur une expression nouvelle des fonctions elliptiques par le quotient de deux séries.**

A J M, v. 14, n<sup>o</sup> 1, 1892, p. 9-14.

Analyse par J. HADAMARD: R O, t. 3, 30 nov. 1892, p. 796.

Analyse par STAECKEL: J F M, Bd. 23, J. 1891, S. 476.

**24. Décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce.**

C R, t. 97, 17 déc. 1883, p. 1419-1422.

**25 à 27. Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce.**

25

Dans le Mémoire n<sup>o</sup> 25, M. P. APPELL étudie la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce, et présente des remarques sur certaines fonctions d'un point analytique  $(x, y)$ . Les principaux résultats qu'il démontre se trouvent indiqués dans la Note n<sup>o</sup> 26.

Le Mémoire n<sup>o</sup> 27 fait suite aux Mémoires n<sup>os</sup> 25 et 28.

Voir Notice sur M. PAUL APPELL, p. 5.

A S E N, 3<sup>e</sup> s., t. 1, avril, mai 1884, p. 135-164.

C R, t. 101, 28 déc. 1885, p. 1478-1480.

A S E N, 3<sup>e</sup> s., t. 3, janv., fév. 1886, p. 9-42.

Analyse du Mémoire n<sup>o</sup> 25: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 9, 2<sup>e</sup> p., août 1885, p. 154-158.

Analyse par F. MÜLLER de la Note n<sup>o</sup> 26: J F M, Bd. 17, J. 1885, S. 409-410.

Analyse du Mémoire n<sup>o</sup> 27: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 12, 2<sup>e</sup> p., fév. 1888, p. 18-19.

**28. Développements en séries des fonctions doublement périodiques de troisième espèce.**

A S E N, 3<sup>e</sup> s., t. 2, janv. 1885, p. 9-36.

Analyse par F. MÜLLER: J F M, Bd. 17, J. 1885, S. 409-410.

**29. Application du théorème de M. MITTAG-LEFFLER aux fonctions doublement périodiques de troisième espèce.**

Dans ce Mémoire, M. P. APPELL donne, du théorème de M. MITTAG-LEFFLER, une application dans laquelle les degrés des polynômes qu'on retranche de la partie principale croissent indéfiniment.

A S E N, 3<sup>e</sup> s., t. 2, févr., mars 1885, p. 67-74.

Analyse par HURWITZ: J F M, Bd. 17, J. 1885, S. 381-383.

**30. Quelques exemples de séries doublement périodiques.**

N A M, 3<sup>e</sup> s., t. 15, mars 1896, p. 126-129.

**31. Formation d'une fonction  $F(x)$  possédant la propriété  $F[\varphi(x)] = F(x)$ .**

M. P. APPELL généralise le mode de représentation analytique des fonctions périodiques et applique à plusieurs exemples la formule qu'il a obtenue.

C R, t. 88, 21 avr. 1879, p. 807-810.

**32. Sur les fonctions telles que**

$$F\left(\sin \frac{\pi}{2} x\right) = (F x).$$

M. P. APPELL applique la méthode qu'il a exposée dans la Note n<sup>o</sup> 31, en lui faisant subir quelques légères modifications pour simplifier le calcul.

C R, t. 88, 19 mai 1879, p. 1022-1024.

**33. Sur quelques applications de la fonction  $\Gamma(x)$  et d'une autre fonction transcendante.**

C R, t. 86, 15 avr. 1878, p. 953-956.

**34. Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions eulériennes étudiées par M. HEINE.**

C R, t. 89, 17 nov. 1879, p. 841-844.

Analyse par F. MÜLLER: J F M, Bd. 11, J. 1879, S. 501-503.

**35. Sur une classe de fonctions qui se rattachent aux fonctions de M. HEINE.**

C R, t. 89, 15 déc. 1879, p. 1031-1032.

**36. Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions eulériennes.**

Dans ce Mémoire, M. P. APPELL développe les considérations qu'il a présentées dans les Notes n<sup>os</sup> 33 à 35. Il étudie en particulier des relations fonctionnelles, renfermant des fonctions  $\Theta$ , ou des fonctions elliptiques, dans lesquelles interviennent trois périodes.

M A, Bd. 19, 1882, août 1881, S. 84-102.

**37. Sur les fonctions uniformes doublement périodiques à points singuliers essentiels.**

C R, t. 94, 3 avr. 1882, p. 936-938.

**4<sup>e</sup> Fonctions de plusieurs variables. Fonctions abéliennes; fonctions de deux variables à deux, trois ou quatre paires de périodes. Fonctions hypergéométriques de deux variables. Inversion des intégrales multiples.**

**38. Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes.**

Dans ce Mémoire, j'étends à une classe particulière de fonctions de deux variables indépendantes  $x$  et  $y$  les théorèmes de MM. WEIERSTRASS et MITTAG-LEFFLER sur les fonctions d'une seule variable. J'applique ensuite les théorèmes généraux ainsi obtenus à la formation de certaines fonctions simplement périodiques de deux variables. P. A.

M. G. MITTAG-LEFFLER a publié son théorème le 7 juin 1876 dans le *Bulletin* de l'Académie royale des Sciences de Suède (*Öfversigt af ...*); ses recherches successives ont été publiées dans ce *Bulletin* et dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris. Il a développé l'ensemble de ses recherches sur la représentation analytique des fonctions homogènes uniformes d'une variable indépendante dans *Acta Mathematica* (t. 4, 1884, p. 1-79).

Les premières recherches de WEIERSTRASS se trouvent dans son Mémoire intitulé *Zur Theorie der eindentigen analytischen Functionen* (A A W B, 16 oct. 1876, S. 11). La démonstration qu'il a donnée du théorème de M. MITTAG-LEFFLER est dans le Mémoire intitulé *Ueber einen functionentheoretischen Satz* des Herrn G. MITTAG-LEFFLER (M A W B, 5 Aug. 1880, S. 707).

A M, t. 2, 15 mars 1883, p. 71-80.

Analyse par J. TANNERY: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 8, 2<sup>e</sup> p., sept. 1884, p. 155-156.

**39.** *Propositions d'Algèbre et de Géométrie déduites de la considération des racines cubiques de l'unité.*

M. P. APPELL obtient des fonctions de deux variables à deux paires de périodes liées par une certaine relation algébrique et une infinité de systèmes de surfaces jouissant de propriétés remarquables.

C R, t. 84, 19 mars 1877, p. 540-543.

**40.** *Sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires.*

M. P. APPELL fait l'étude de  $n + 1$  fonctions de  $n$  variables, à  $n$  groupes de périodes, définies par un système d'équations aux différentielles totales; ces fonctions sont liées par une relation algébrique; elles généralisent celle de la Note n<sup>o</sup> 39.

C R, t. 84, 11 juin 1877, p. 1378-1380.

**41.** *Sur des fonctions uniformes de deux points analytiques qui sont laissées invariables par une infinité de transformations rationnelles.*

C R, t. 96, 4 juin 1883, p. 1643-1646.

**42.** *Sur un cas de réduction des fonctions  $\Theta$  de deux variables à des fonctions  $\theta$  d'une variable.*

C R, t. 94, 13 fév. 1882, p. 421-424.

**43.** *Sur des cas de réduction des fonctions  $\Theta$  de plusieurs variables à des fonctions  $\Theta$  d'un moindre nombre de variables.*

B S M F, t. 10, 1881-1882, 3 mars 1882, p. 59-67.

Analyse par F. MÜLLER: J F M, Bd. 14, J. 1882, S. 405-406.

**44.** *Sur une fonction analogue à la fonction  $\Theta$ .*

Dans cette Note, il s'agit d'une fonction définie par une série simple d'exponentielles dont l'exposant est un polynôme du quatrième degré en  $n$ . Cette fonction a été étudiée ensuite par M. RIVEREAU (A F S Ma, t. 2, 1892, p. 59).

A F S Ma, t. 1, 1891, p. 47-52.

**45.** *Exemples de fonctions de plusieurs variables admettant un groupe de substitutions linéaires entières.*

M. P. APPELL applique la fonction définie dans la Note n<sup>o</sup> 44.

B S M F, t. 19, 1890-1891, 18 nov. 1891, p. 125-127.

**46.** *Sur les fonctions de BERNOULLI à deux variables.*

Extrait d'une Lettre adressée à M. MARTIN KRAUSE par M. P. APPELL.

A M P G, d. R., 4 Bd., 9 oct. 1903, S. 292-293.

Analyse par G. KOWALEWSKI: J F M, Bd. 34, J. 1903, S. 484-485.

**47.** *Sur des fonctions de deux variables à trois ou quatre paires de périodes.*

C R, t. 90, 26 janv. 1880, p. 174-176.

**48.** *Sur certaines expressions quadruplement périodiques.*

C R, t. 108, 25 mars 1889, p. 607-609.

**49.** *Sur les fonctions de deux variables à plusieurs paires de périodes.*

C R, t. 110, 27 janv. 1890, p. 181-183.

**50.** *Sur les fonctions de deux variables quadruplement périodiques de troisième espèce.*

A S E N, 2<sup>e</sup> s., t. 7, mai 1890, p. 143-154.

Analyse: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 16, 2<sup>e</sup> p., déc. 1892, p. 190-191.

**51. 52.** *Sur les fonctions périodiques de deux variables.*

L'objet de ce travail est l'étude des fonctions méromorphes de deux variables à quatre (ou à trois) paires de périodes. La méthode suivie peut être étendue d'elle-même aux fonctions de  $n$  variables à  $2n$  groupes de périodes.

C R, t. 111, 3 nov. 1890, p. 636-638.

J L, 4<sup>e</sup> s., t. 7, f. 2, 1891, p. 157-219.

Analyse par BURKHARDT: J F M, Bd. 23, J. 1891, S. 430-431.

Analyse par J. HADAMARD: R O, t. 3, 15 juin 1892, p. 419.

**53. 54.** *Sur les fonctions abéliennes.*

C R, t. 94, 26 juin 1882, p. 1702-1704.

C R, t. 103, 20 déc. 1886, p. 1246-1248.

**55. 56.** *Sur l'inversion des intégrales abéliennes.*

C R, t. 99, 8 déc. 1884, p. 1010-1011.

J L, 4<sup>e</sup> s., t. 1, f. 3, 1885, p. 245-279.

Analyse par ДУЧК: J F M, Bd. 17, J. 1885, S. 473-475.

**57.** *Formes des intégrales abéliennes des diverses espèces.*

A F S T, t. 7, 1893, p. A.5-A.8.

**58.** *Sur les fonctions abéliennes considérées comme fonctions algébriques de fonctions d'une variable.*

Ce Mémoire est inséré dans le premier des deux Tomes des *Acta Mathematica* imprimés NIELS HENRICK ABEL *in Memoriam*.

A M, t. 26, 8 juil. 1902, p. 249-253.

Analyse par STAECKEL: J F M, Bd. 33, J. 1902, S. 442-443.

**59.** *Sur les séries hypergéométriques de deux variables, et sur des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles.*

Je définis quatre séries ordonnées suivant les puissances positives croissantes de deux variables, qui se rattachent à la célèbre série de GAUSS, comme les fonctions  $\Theta$  de deux variables de GÖPEL et de ROSENHAIN se rattachent aux fonctions  $\Theta$  d'une variable d'ABEL et de JACOBI. P. A.

C R, t. 90, 16 févr. 1880, p. 296-298.

**60.** *Sur la série  $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y)$ .*

Cette série, qui a été définie dans la Note n° 59, peut être représentée par une intégrale définie semblable à celle dont JACOBI s'est occupé (J C, t. 56, 1859, S. 149).

C R, t. 90, 26 avr. 1880, p. 977-979.

**61.** *Sur quelques formules relatives aux fonctions hypergéométriques de deux variables.*

C R, t. 91, 16 août 1880, p. 364-368.

**62.** *Sur des polynomes de deux variables analogues aux polynomes de JACOBI.*

A M P G, 66. Teil, 1881, 26 oct. 1880, S. 238-245.

Analyse par HOPPE: J F M, Bd. 13, J. 1881, S. 389-390.

**63.** *Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables.*

Ce Mémoire a été présenté à l'Académie dans la séance du 29 mars 1880; je lui ai fait subir quelques modifications, afin d'y faire rentrer les résultats que j'ai obtenus depuis et qui ont été indiqués dans deux Notes présentées à l'Académie le 26 avril et 16 août 1880. P. A.

J L, 3<sup>e</sup> s., t. 8, mai, juin 1882, p. 173-216.

Analyse: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 9, 2<sup>e</sup> p., janv. 1885, p. 14-15.



**64. Sur certaines formules de HANSEN et de M. TISSERAND.**

M. P. APPELL trouve que la valeur d'un certain coefficient est exprimée par un polynome hypergéométrique de deux variables, ce polynome étant formé avec une des fonctions qu'il définit dans la Note n° 59.

C R, t. 97, 12 nov. 1883, p. 1036-1039.

**65. Sur une formule de M. TISSERAND et sur les séries hypergéométriques de deux variables.**

M. P. APPELL applique, à des questions étudiées par TISSERAND, M. RADAU et CALLANDREAU, les résultats qu'il a donnés dans le Mémoire n° 63 et dans la Note n° 64.

J L, 3<sup>e</sup> s., t. 10, déc. 1884, p. 407-428.

Analyse: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 10, 2<sup>e</sup> p., nov. 1886, p. 225-226.

Analyse par WANGERIN: J F M, Bd. 16, J. 1884, S. 454-455.

**66. Les polynomes d'HERMITE rattachés aux polynomes de LEGENDRE.**

A S A P P, v. 5, n° 2<sup>o</sup>, 1910, p. 65-68.

**67. Quelques propriétés des polynomes  $U_{m, n}$  d'HERMITE et des polynomes  $X_n$  de LEGENDRE.**

A S A P P, v. 5, n° 4<sup>o</sup>, 1910, p. 209-212.

**68. Sur une classe de polynomes à deux variables et le calcul approché des intégrales doubles.**

M. P. APPELL étend aux intégrales doubles la méthode que GAUSS a fondée sur les propriétés des polynomes de LEGENDRE pour le calcul approché des intégrales simples.

A F S T, t. 4, 1890, p. H.1-H.20.

Analyse par R. LE VAVASSEUR: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 28, 2<sup>e</sup> p., janv. 1894, p. 12-14.

Analyse par F. MÜLLER: J F M, Bd. 22, J. 1890, S. 299-300.

**69. 70. Sur un mode d'inversion des intégrales multiples.**

B S M F, t. 25, 20 janv. 1897, p. 10.

C R, t. 124, 1<sup>er</sup> fév. 1897, p. 213-214.

**71. Exemples d'inversion d'intégrales doubles.**

A J M, v. 19, n° 4, 1897, p. 377-380.

**5<sup>o</sup> Équations différentielles ordinaires. Invariants.**

**72. Sur des polynomes satisfaisant à une équation différentielle du troisième ordre.**

M. P. APPELL applique, dans cette Communication, un théorème qu'il a démontré dans la Note n° 8, p. 22.

A F A S, 8<sup>e</sup> Session, Montpellier, 3 sept. 1879, p. 257-260.

**73. Sur certaines équations différentielles linéaires contenant un paramètre variable.**

A F A S, 8<sup>e</sup> Session, Montpellier, 3 sept. 1879, p. 253-257.

**74. Intégration de certaines équations différentielles à l'aide des fonctions  $\Theta$ .**

M. P. APPELL tire des conséquences remarquables du théorème de RIEMANN sur les zéros des fonctions  $\Theta$  de plusieurs variables.

C R, t. 90, 24 mai 1880, p. 1207-1210.

**75. Sur les équations différentielles linéaires à une variable indépendante.**

C R, t. 90, 21 juin 1880, p. 1477-1479.

**76. Sur la transformation des équations différentielles linéaires.**

C R, t. 90, 26 juil. 1880, p. 211-214.

**77. Sur les équations différentielles linéaires.**

M. P. APPELL signale, pour les équations différentielles linéaires, des propriétés analogues à celles des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique et à la transformation des équations algébriques.

C R, t. 91, 26 oct. 1880, p. 684-685.

**78.** *Sur une classe d'équations différentielles linéaires.*

Se plaçant à un certain point de vue, M. P. APPELL généralise les recherches de M. CH. HERMITE sur l'équation de LAMÉ (C R, t. 86, 1878, p. 850), celles de MM. E. PICARD et MITTAG-LEFFLER sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques (C R, t. 90, 1880, p. 293-299) et celles de FUCHS sur certaines équations différentielles linéaires (J L, t. 4, 1878, p. 125). M. P. APPELL considère des équations différentielles dont l'intégrale générale n'a que des pôles sur la surface de RIEMANN et dont les substitutions fondamentales sont permutables.

C R, t. 91, 13 déc. 1880, p. 972-974.

Analyse: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 5, 2<sup>e</sup> p., janv. 1881, p. 21-22.

**79.** *Sur une classe d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions algébriques de la variable indépendante.*

M. P. APPELL résume un Mémoire où se trouvent développées des propositions contenues dans la Note n<sup>o</sup> 78.

C R, t. 92, 10 janv. 1881, p. 61-63.

**80.** *Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques.*

C R, t. 92, 25 avr. 1881, p. 1005-1008.

**81.** *Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.*

Ces équations sont celles dont l'intégrale générale n'admet, sur une surface de RIEMANN, d'autres singularités que des pôles et des points critiques logarithmiques. M. P. APPELL les classe en équations de 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup> espèce d'après des caractères analogues à ceux qui servent à classer les trois espèces d'intégrales abéliennes.

A M, t. 13, 1890, 21 janv. 1889, p. 163-174.

**82.** *Sur des équations différentielles linéaires dont les intégrales vérifient des relations de la forme  $F[\varphi(x)] = \psi(x)F(x)$ .*

33

M. P. APPELL, qui a publié deux Notes sur les fonctions  $F(x)$  satisfaisant à une relation de la forme  $F[\varphi(x)] = F(x)$ , montre que ces fonctions et les fonctions plus générales de la forme  $F[\varphi(x)] = \psi(x)F(x)$  se présentent dans l'intégration de certaines équations différentielles linéaires, et en particulier dans l'intégration des équations du second ordre.

C R, t. 93, 7 nov. 1881, p. 699-701.

Analyse: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 6, 2<sup>e</sup> p., janv. 1882, p. 31-32.

Analyse par HAMBURGER: J F M, Bd. 13, J. 1881, S. 253-254.

**83.** *Mémoire sur les équations différentielles linéaires.*

Le résumé de ce Mémoire se trouve dans la Note n<sup>o</sup> 77.

A S E N, 2<sup>e</sup> s., t. 10, nov., déc. 1881, p. 391-424.

Analyse: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 6, 2<sup>e</sup> p., déc. 1882, p. 269-274.

Analyse par HAMBURGER: J F M, Bd. 13, J. 1881, S. 254-255.

**84. 85.** *Sur une classe d'équations différentielles linéaires binomes à coefficients algébriques.*

C R, t. 94, 30 janv. 1882, p. 203-205.

A S E N, 2<sup>e</sup> s., t. 12, janv., fév. 1883, p. 9-46.

Analyse: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 8, 2<sup>e</sup> p., avr. 1884, p. 59-61.

Analyse par HAMBURGER: J F M, Bd. 15, J. 1883, S. 246-247.

**86.** *Sur les fonctions uniformes affectées de coupures et sur une classe d'équations*

*différentielles linéaires.*

C R, t. 96, 9 avr. 1883, p. 1018-1020.

**87.** *Sur des équations linéaires intégrables à l'aide de la fonction  $\chi_m(x, y)$ .*

M. P. APPELL indique une équation différentielle linéaire avec second membre dont les coefficients sont composés avec des fonctions  $\Theta$  et leurs dérivées, et dont l'intégrale générale s'exprime à l'aide des fonctions  $\Theta$  et de la fonction de deux variables  $\chi_m(x, y)$ , qu'il a introduite dans ses Mémoires n<sup>os</sup> **25, 27, 28**.

A S E N, 3<sup>e</sup> s., t. 5, juin, juil. 1888, p. 211-218.

Analyse: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 14, 2<sup>e</sup> p., oct. 1890, p. 198-199.

Analyse par F. MÜLLER: J F M, Bd. 20, J. 1888, S. 452-454.

**88.** *Sur une classe d'équations différentielles réductibles aux équations linéaires.*

C R, t. 107, 12 nov. 1888, p. 776-778.

**89. 90.** *Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable.*

34

C R, t. 112, 5 janv. 1891, p. 34-37.

A M, t. 15, 1891, 28 sept.-5 oct. 1891, p. 281-315.

Analyse: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 17, 2<sup>e</sup> p., fév. 1893, p. 30-31;—t. 19, 2<sup>e</sup> p., avr. 1895, p. 77-79.

Analyse par J. HADAMARD: R O, t. 3, 15 oct. 1892, p. 683.

Analyse par HAMBURGER: J F M, Bd. 23, J. 1891, S. 333-335.

**91.** *Sur les équations différentielles algébriques et homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées.*

M. P. APPELL indique la possibilité d'étendre la théorie des invariants des équations différentielles linéaires et homogènes aux équations *homogènes* mais non *linéaires*.

C R, t. 104, 20 juin 1887, p. 1776-1779.

Analyse par HAMBURGER des Notes n<sup>os</sup> **91** et **92**: J F M, Bd. 19, J. 1887, S. 291-293.

**92.** *Sur les invariants des équations différentielles.*

M. P. APPELL complète la Note n<sup>o</sup> **91**.

C R, t. 105, 4 juil. 1887, p. 55-58.

**93.** *Sur les invariants de quelques équations différentielles.*

Dans ce Mémoire, M. P. APPELL étudie les invariants et les cas d'intégrabilité:

1<sup>o</sup> D'équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 + a_1y + \dots + a_ny^n}{b_0 + b_1y + \dots + b_py^p} \quad (p < n),$$

qui conservent cette forme quand on choisit une nouvelle fonction inconnue  $\eta$  et une nouvelle variable indépendante  $\xi$  liées à  $y$  et  $x$  par les relations

$$y = \eta u(x) + v(x), \quad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x);$$

2<sup>o</sup> Des équations différentielles algébriques et homogènes par rapport à la fonction inconnue  $y$  et à ses dérivées, ces équations conservant la même forme quand on y fait

$$y = \eta u(x), \quad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x).$$

J L, 4<sup>e</sup> s., t. 5, f. 4, 1889, p. 361-423.

Analyse par HAMBURGER: J F M, Bd. 21, J. 1889, S. 312-314.

Analyse par GOMES TEIXEIRA: J S T, v. 9, 1889, p. 124-125.

Analyse par E. GOURSAT: R O, t. 1, 30 mars 1890, p. 180.

**94. Sur les équations différentielles homogènes du second ordre à coefficients constants.**

35

A F S T, t. 3, 1889, p. K.1-K.12.

Analyse par HAMBURGER: J F M, Bd. 21, J. 1889, S. 327.

**95. Observations sur une Communication de M. C. BOURLET,**

Intitulée *Sur certaines équations analogues aux équations différentielles.*

C R, t. 124, 21 juin 1897, p. 1433-1434.

**96. Sur le théorème de POISSON et un théorème récent de M. A. BUHL.**

Dans une Note (C R, t. 132, 1901, p. 313), M. A. BUHL donne une proposition générale dont il déduit, comme cas particulier, ce théorème de POISSON: *La forme aux dérivées partielles représentée symboliquement par  $(\alpha, \beta)$  est une intégrale d'un système d'équations canoniques si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux intégrales de ce système.* Dans sa Note, M. P. APPELL montre que, inversement, la proposition de M. A. BUHL peut être considérée comme une conséquence du théorème de POISSON.

C R, t. 133, 5 août 1901, p. 317-319.

**6<sup>e</sup> Équations aux dérivées partielles. Potentiels triplement périodiques. Potentiels multiformes.**

**97. Sur les séries hypergéométriques de deux variables, et sur des équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles.**

Dans cette Note, qui se rattache à la Note n<sup>o</sup> 59, p. 29, j'étends les théorèmes de RIEMANN et de FUCHS, sur les intégrales des équations différentielles linéaires à une variable, à des équations simultanées définissant  $r$  et  $t$  en fonctions linéaires de  $s, p, q, z$ . P. A.

C R, t. 90, 29 mars 1880, p. 731-734.

**98. Sur certaines équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles.**

En commun avec M. E. PICARD.

Cette Note contient une extension d'un théorème donné par M. E. PICARD pour les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques (C R, t. 90, 1880, p. 293).

C R, t. 92, 21 mars 1881, p. 692-695.

Analyse: B S M; 2<sup>e</sup> s., t. 5, 2<sup>e</sup> p., mai. 1881, p. 98.

**99. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles.**

36

M. P. APPELL montre que l'équation qu'il a rencontrée dans la théorie des fonctions hypergéométriques de deux variables (voir n<sup>o</sup> 59, p. 29) contient, comme cas particulier, une équation différentielle linéaire étudiée par M. G. DARBOUX (C R, t. 95, 1882, p. 69) et étend à son équation les principales propriétés indiquées par ce géomètre.

B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 6, 1<sup>re</sup> p., déc. 1882, p. 314-318.

Analyse par TOEPLITZ: J F M, Bd. 14, J. 1882, S. 300.

**100. Sur les fonctions satisfaisant à l'équation  $\Delta F = 0$ .**

M. P. APPELL considère une fonction  $F(x, y, z)$ , de trois variables réelles représentant les coordonnées rectangulaires d'un point M. Il suppose que la fonction  $F$  est uniforme, continue, qu'elle admet des dérivées premières et secondes et qu'elle vérifie l'équation

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

en tous les points M situés à l'intérieur d'une surface fermée S, excepté en certains points isolés, qu'il appelle *points singuliers*. Il

classe ces points en pôles et points essentiels.

C R, t. 96, 5 fév. 1883, p. 368-371.

**101.** *Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation différentielle  $\Delta F = 0$ .*

Dans ce Mémoire, M. P. APPELL fait l'étude générale des fonctions qui satisfont à l'équation  $\Delta F = 0$ . La première partie contient une extension d'un théorème dû à M. MITTAG-LEFFLER et plusieurs applications d'un théorème de GREEN; la seconde contient l'étude de celles de ces fonctions qui reprennent les mêmes valeurs aux points homologues d'un réseau de parallélépipèdes et qui possèdent des propriétés semblables à celles de la partie réelle d'une fonction doublement périodique d'une variable imaginaire. Ces fonctions s'expriment à l'aide d'un élément simple Z analogue à la fonction

$\frac{H'}{H}$  introduite par HERMITE dans la théorie des fonctions elliptiques.

A M, t. 4, 22 janv.-3 mars 1884, p. 313-374.

Analyse par F. MÜLLER: J F M, Bd. 16, J. 1884, S. 373-374.

Analyse par J. TANNERY: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 13, 2<sup>e</sup> p., juin 1889, p. 98-100.

**102. 103.** *Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions vérifiant l'équation du potentiel  $\Delta F = 0$ .*

C R, t. 102, 21 juin 1886, p. 1439-1442.

J L, 4<sup>e</sup> s., t. 3, f. 1, 1887, p. 5-52.

Analyse par TOEPLITZ: J F M, Bd. 19, J. 1887, S. 418-420.

**104.** *Sur les fonctions harmoniques à trois groupes de périodes.*

37

M. P. APPELL indique un élément analytique pouvant remplacer la fonction Z des deux Mémoires n<sup>os</sup> 101 et 103.

R C M P, t. 22, 1<sup>er</sup> sept. 1906, p. 361-370.

Analyse par WANGERIN: J F M, Bd. 37, J. 1906, S. 482-483.

Application par A. MYLLER: C R, t. 145, 11 nov. 1907, p. 790-792.

**105. 106.** *Sur des potentiels conjugués.*

M. P. APPELL donne un système de quatre équations aux dérivées partielles du premier ordre auxquelles satisfont quatre fonctions X, Y, Z, T de trois variables réelles  $x, y, z$ . Il démontre que si l'on choisit arbitrairement la fonction T vérifiant l'équation du potentiel, il existe une infinité de fonctions X, Y, Z vérifiant le système précédent; il parvient à préciser le degré d'indétermination et à exprimer ces fonctions par des intégrales définies.

B S M F, t. 19, 1890-1891, 15 avr. 1891, p. 68-70.

A F S Ma, t. 2, f. 3, 1892, p. 53-58.

Analyse par WANGERIN: J F M, Bd. 23, J. 1891, S. 990.

**107.** *Quelques remarques sur la théorie des potentiels multiformes.*

Extrait d'une Lettre adressée à M. F. KLEIN par M. P. APPELL.

M. P. APPELL considère une certaine fonction  $F(x, y, z)$  qui vérifie l'équation  $\Delta F = 0$  et qui admet un cercle pour ligne singulière.

M A, Bd. 30, 26 avr. 1887, S. 155-156.

**Analyse appliquée à l'Algèbre.**

**1.** *Sur les fractions continues périodiques.*

A M P G, 62. Teil, 1878, S. 183-188.

Analyse par GÜNTHER: J F M, Bd. 10, J. 1878, S. 151-152.

**2.** *Sur les polynômes qui expriment la somme des puissances  $p^{\text{ièmes}}$  des  $n$  premiers nombres entiers.*

N A M, 3<sup>e</sup> s., t. 6, juil. 1887, p. 312-321.

### 3. Sur les valeurs approchées des polynomes de BERNOULLI.

M. P. APPELL, appliquant aux polynomes de BERNOULLI une méthode donnée par M. G. DARBOUX dans un Mémoire sur les fonctions de grands nombres (J L, 3<sup>e</sup> s., t. 4, 1878, p. 5, 377), donne l'expression approchée du polynome de BERNOULLI de rang  $n$ , pour  $n$  très grand.

N A M, 3<sup>e</sup> s., t. 6, déc. 1887, p. 547-554.

### 4. Sur une suite de polynomes ayant toutes leurs racines réelles.

A M P G, d. R., 1. Bd., 1901, 10 déc. 1900, S. 69-71.

## ARTICLE.

### 1. Sur les fonctions sphériques et autres analogues.

En commun avec M. ARMAND LAMBERT (exposé fait d'après l'Article en allemand de M. A. WANGERIN, avec des additions).

E S M E F, t. II, Art. 28 (*sous presse*).

## SECTION III.

# GÉOMÉTRIE.

**EXTRAIT DU RAPPORT LU PAR M. GASTON DARBOUX, EN DÉCERNANT A M. PAUL APPELL, AU NOM DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, LE PRIX BORDIN POUR SON «MÉMOIRE SUR LES DÉBLAIS ET LES REMBLAIS», LE 21 DÉCEMBRE 1885.**

Dans la question proposée en 1884, comme sujet du prix BORDIN (Géométrie), l'Académie demandait aux concurrents, *soit l'étude générale du problème des déblais et des remblais, soit la solution dans un cas simple choisi par l'auteur du Mémoire.*

L'étude de ce beau problème remonte à MONGE qui, dans un Mémoire publié en 1781, où se trouvent développées d'une manière incidente la théorie des lignes de courbure et les propriétés des systèmes de rayons rectilignes, s'était posé la question générale suivante:

*Deux volumes équivalents étant donnés, les décomposer en parcelles infiniment petites et deux à deux équivalentes, se correspondant suivant une loi telle que, si l'on multiplie le chemin parcouru par chaque parcelle, transportée sur celle qui lui correspond, par le volume de cette parcelle, la somme des produits ainsi obtenus soit un minimum.*

Dans le cas où les volumes peuvent être assimilés à des aires planes situées dans le même plan, MONGE résout complètement le problème en remarquant que les routes de transport, lorsqu'elles forment un système continu, doivent détacher dans le déblai et dans le remblai des aires égales. Dans le cas où les routes ne peuvent former un système continu, il présente quelques remarques, complétées depuis par DUPIN dans un Mémoire sur le même sujet, qui fait partie des *Applications d'Analyse, de Géométrie et de Mécanique*. Enfin MONGE, abordant le cas le plus difficile, celui où le déblai et le remblai sont des volumes, nécessairement équivalents, fait connaître la proposition suivante, qui est la pierre angulaire de cette théorie:

*Les routes de transport doivent servir chacune à une infinité de parcelles, et elles sont nécessairement normales à une famille de surfaces parallèles.*

Mais il faut avouer que les raisonnements par lesquels MONGE est conduit à ce beau théorème n'entraînent, en aucune manière, l'adhésion; ce point essentiel, malgré l'étude nouvelle qui en a été faite par DUPIN, attendait encore une démonstration solide et appelait de nouvelles recherches.

La Commission espérait donc rencontrer, dans quelques-uns des Mémoires soumis à son examen, la preuve complète et l'étude générale du théorème de MONGE; elle désirait aussi, sans trop oser l'espérer à cause de la difficulté de la question, obtenir

l'intégration complète, dans un cas suffisamment étendu, de l'équation aux dérivées partielles du second ordre, déjà formée par MONGE, qui sert à déterminer la surface normale à toutes les routes.

Le Mémoire inscrit sous le n° 5 répond d'une manière complète aux espérances aussi bien qu'aux vœux de la Commission. C'est un travail de haute valeur où sont employées, alternativement et avec le plus grand succès, les ressources de la Géométrie et les méthodes de l'Analyse moderne; il réalise un progrès considérable dans l'étude de la question mise au concours. Au début de son Mémoire, l'auteur s'élève de la considération d'un système de points isolés à celle des masses continues. Il énonce, sous le nom de *principe de translation, principe de symétrie*, etc., un certain nombre de propositions élégantes et simples, dont l'application rendra certainement de grands services dans la pratique. Nous signalerons plus particulièrement deux propositions faisant connaître deux systèmes différents de routes, d'une définition très générale et réalisant, l'un et l'autre, le *minimum absolu* du prix de transport.

Dans la deuxième Partie de son travail, l'auteur du Mémoire n° 5, après avoir démontré que les routes forment un système continu ou se décomposent en plusieurs systèmes continus, applique la méthode des variations au problème de MONGE, et il établit le théorème fondamental, sans même supposer que la densité soit constante à l'intérieur du déblai ou du remblai. Enfin il examine le cas où les routes se partagent en plusieurs systèmes continus et il indique les moyens de déterminer les surfaces séparatrices, c'est-à-dire les surfaces auxquelles viennent aboutir les routes appartenant à deux systèmes différents et continus.

Dans le cas des aires planes, nous l'avons déjà rappelé, le problème de MONGE peut recevoir une solution complète où ne figurent que des quadratures. On devait se demander si, dans l'espace, l'équation aux dérivées partielles donnée par MONGE n'est pas, elle aussi, intégrable dans tous les cas et d'une manière générale. Les résultats obtenus par l'auteur du Mémoire donnent une réponse complète à cette question difficile. Dans le cas où, par exemple, les volumes se réduisent à des aires planes situées dans des plans parallèles, l'intégration de l'équation de MONGE est ramenée à celle des surfaces minima si les aires ont même densité, et à celle des surfaces à courbure constante si les densités sont différentes.

41

Ces exemples sont précieux, parce qu'ils prouvent qu'on doit renoncer à intégrer dans tous les cas l'équation du second ordre de MONGE; mais aussi parce qu'ils ont permis à l'auteur de signaler avec netteté les difficultés nouvelles et sérieuses qu'on rencontrera, même après avoir intégré cette équation.

Ces difficultés sont de la nature de celles qui se présentent dans la théorie des surfaces minima. Si l'on considère toutes les surfaces formant une nappe continue passant par une courbe fermée, le calcul des variations apprend que la surface d'aire minimum aura, en chaque point, ses rayons de courbure égaux et de signes contraires. L'équation aux dérivées partielles de cette surface une fois intégrée, la condition à laquelle elle est assujettie de passer par la courbe ne permet pas de déterminer complètement les deux fonctions arbitraires dont elle dépend. Il existe une infinité de surfaces minima contenant la courbe; mais ces surfaces ne satisfont pas toutes, on le sait, à la condition, supposée cependant par le calcul des variations, de former une nappe continue reliant les uns aux autres tous les points de la courbe. On ne peut déterminer les deux fonctions arbitraires qu'en employant des considérations tout à fait indépendantes de la méthode des variations, puisque la condition à laquelle il s'agit de satisfaire est supposée remplie au moment même où commence l'application de cette méthode. Le problème auquel on est ainsi conduit arrête aujourd'hui encore les efforts des géomètres et n'a pu être résolu que dans quelques cas particuliers.

La solution du problème de MONGE présente des difficultés analogues et peut-être plus grandes. Les fonctions arbitraires d'une variable, qui entrent dans les équations du système des routes, doivent être déterminées par la condition que les routes forment un système continu, permettant de transporter dans l'ensemble du remblai la totalité des parcelles qui composent le déblai. La condition, évidente *a priori*, que les routes limites soient tangentes à la fois à la surface du déblai et à celle du remblai ne fait connaître qu'une de ces deux fonctions et il n'existe, comme dans la théorie des surfaces minima, aucune règle fixe et précise conduisant à la solution complète de la question proposée. Des exemples bien choisis jettent beaucoup de lumière sur cette discussion délicate.

Les indications rapides qui précèdent suffiront à montrer toute l'importance des résultats obtenus par l'auteur du Mémoire n° 5....

La Commission propose de partager le prix Bordin entre les Mémoires n° 5 et n° 1 en attribuant *deux mille francs* à l'auteur du Mémoire n° 5....

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

L'auteur du Mémoire inscrit sous le n° 5 est M. P. APPELL.



**MÉMOIRES. NOTES.****Géométrie infinitésimale.****1. Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide.**

Thèse pour le grade de Docteur ès Sciences mathématiques, soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris le 20 juin 1876.

M. P. APPELL établit les *propriétés des pôles et des plans polaires par rapport à une cubique gauche*. Et il étudie les deux problèmes suivants: 1<sup>o</sup> *Étant donné un mouvement hélicoïdal, déterminer les cubiques gauches correspondantes*; 2<sup>o</sup> *Étant donnée une cubique définie par certaines équations, déterminer le mouvement hélicoïdal correspondant*.

A S E N, 2<sup>e</sup> s., t. 5, juil., août 1876, p. 245-274.

Paris, G.-V., 1876, in-4, IV-35 p.

Analyse: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 1, 1<sup>re</sup> p., août 1877, p. 257-259.

Analyse par STURM: J F M, Bd. 8, J. 1876, S. 510-512.

**2. Sur une propriété caractéristique des hélices.**

A M P G, 64. Teil, 30 janv. 1879, S. 19-23.

**3. Mémoire sur les Déblais et les Remblais des systèmes continus ou discontinus.**

Ce Mémoire, présenté par M. P. APPELL à l'Académie des Sciences pour le Concours du Prix BORDIN (Géométrie) pour 1884, a été couronné.

M S A S, t. 29, n<sup>o</sup> 3, 1887, p. 1-208.

Rapport de M. G. DARBOUX: C R, t. 101, 21 déc. 1885, p. 1312-1316.

Analyse par E. LAMPE: J F M, Bd. 20, J. 1888, S. 375-377.

**4. Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux.**

A J M, v. 10, 1888, p. 175-186.

Analyse par AUGUST: J F M, Bd. 19, J. 1887, S. 825-829.

**Géométrie analytique.****1. Note sur les cubiques gauches.**

C R, t. 82, 3 janv. 1876, p. 70-72.

**2. 3. Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du quatrième ordre.**

C R, t. 83, 18 déc. 1876, p. 1209-1211.

A M P G, 62. Teil, 1878, S. 175-182.

**4. Théorème général sur les courbes unicursales.**

A M P G, 60. Teil, 1877, S. 125-127.

**5. Théorème concernant les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe de droites du premier ordre.**

A M P G, 60. Teil, 1877, S. 274-275.

**6. Sur l'homographie d'ordre supérieur.**

B S P, 7<sup>e</sup> s., t. 4, 1879-1880, 25 oct. 1879, p. 18-20.

**7. Sur une représentation des points imaginaires en Géométrie plane.**

A M P G, 61. Teil, 16 août 1877, S. 359-360.

**8. Sur les familles de courbes orthogonales uniquement composées de coniques.**

A M P G, 63. Teil, 1879, 4 août 1878, S. 50-55.

Analyse par AUGUST: J F M, Bd. 11, J. 1879, S. 501-503.

**9.** *Sur les points d'intersection d'une conique fixe par une conique mobile passant par deux points fixes.*

N A M, 3<sup>e</sup> s., t. 8, janv. 1889, p. 48-56.

**10.** *Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire.*

N A M, 3<sup>e</sup> s., t. 11, mars 1892, p. 115-119.

**11.** *Sur les courbes autopolaires par rapport à une conique donnée.*

B S M F, t. 22, 7 fév. 1894, p. 27.

**12.** *Courbes autopolaires.*

N A M, 3<sup>e</sup> s., t. 13, mai 1894, p. 206-210.

**13.** *Sur le degré de réalité d'une courbe algébrique à coefficients réels.*

A M P G, d. R., 4. Bd., 1903, 19 juin 1902, S. 20-21.

**14.** *Sur les lignes asymptotiques de la surface représentée par l'équation  $XYZ = T^3$ .*

A M P G, 61. Teil, 21 mars 1877, S. 144-145.

**15.** *Sur les conditions qui expriment qu'un système de trois axes est trirectangle.*

N A M, 3<sup>e</sup> s., t. 13, fév. 1894, p. 41-43.

**16.** *Exercices sur les courbes de direction.*

LAGUERRE a appelé *courbes de direction* les courbes algébriques  $f(x, y) = 0$ , telles que les cosinus directeurs de la tangente en un point puissent être exprimés *rationnellement* en fonction de  $x$  et de  $y$ .

N A M, 3<sup>e</sup> s., t. 15, nov. 1896, p. 491-495.

**17.** *Exercice sur la détermination du point double d'une cubique plane unicursale.*

R M S, t. 4, 8<sup>e</sup> a., juin 1898, p. 505-506.

**18.** *Exercices sur la détermination des points doubles d'une quartique plane unicursale.*

R M S, t. 4, 8<sup>e</sup> a., sept. 1898, p. 585-589.

**19.** *Sur le cylindroïde.*

R M S, t. 3, 5<sup>e</sup> a., juin 1895, p. 129-130.

**20.** *Propriété caractéristique du cylindroïde.*

Il existe un conoïde droit, signalé par PLÜCKER et par CAYLEY, nommé *cylindroïde*, jouissant de la propriété que le lieu des projections d'un point fixe quelconque sur ses génératrices est une courbe plane. M. P. APPELL démontre que, réciproquement, toute surface réglée non cylindrique possédant cette propriété est un cylindroïde.

B S M F, t. 28, 20 juin 1900, p. 261-265.

**21 à 32.** *Principales Notes dans l'Ouvrage intitulé «Leçons de Géométrie analytique par C. BRIOT et J.-C. BOUQUET».*

Pages.

**142.** *Sur les fonctions des coefficients de l'équation d'une conique et de l'angle des axes qui ne changent pas quand on fait une transformation de coordonnées.*

159-163

**143.** *Application au calcul des axes d'une conique à centre, du paramètre d'une parabole.*

163-166

**306.** *Coordonnées tangentielles.*

319-321

**330.** *Coordonnées homogènes, points à l'infini.*

344-351

**331.** *Coordonnées trilinéaires.*

<b>332. 333.</b> <i>Intersection de deux coniques. Discussion de l'équation en <math>\lambda</math> par la méthode de M. DARBOUX.</i>	364-383
<i>Signification géométrique de certaines relations simples entre les racines de l'équation en <math>\lambda</math>.</i>	374-382
<b>369 bis.</b> <i>Remarques sur la construction des courbes. Régions.</i>	444-451
<i>Notions sur les courbes unicursales.</i>	492-501
<b>598.</b> <i>Courbes gauches du troisième ordre et du quatrième ordre.</i>	712-719
<b>599.</b> <i>Notions sur les complexes de droites.</i>	723-730

NOTA.—De nombreux exercices ont été ajoutés dans le texte, notamment à propos des coordonnées tangentielles, des coordonnées homogènes, de l'équation en  $\lambda$ , des courbes unicursales et des complexes.

Paris, C. D., 19<sup>e</sup> éd., 1907, gr. in-8.

## ARTICLE.

### 1. *Le Problème des Déblais et des Remblais.*

R O, t. 1, 28 fév. 1890, p. 97-99.

## SECTION IV.

# MÉCANIQUE RATIONNELLE ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

## OUVRAGES.

### 1. COURS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE,

Professé par M. P. APPELL à la Faculté des Sciences de Paris, rédigé par MM. ABRAHAM et DELASSUS.

Paris, Hn., 1888, in-4, lithographié, IV-436 p.

### 2. LEÇONS SUR L'ATTRACTION ET LA FONCTION POTENTIELLE,

Professés à la Sorbonne pendant l'année scolaire 1890-1891, rédigées par M. CHARLIAT.

Paris, G. C., 1892, gr. in-8, 63 p.

Analyse par LÉON AUTONNE: R O, t. 3, 30 juil. 1892, p. 521.

### 3. TRAITÉ DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Cours de Mécanique de la Faculté des Sciences de Paris.

Tome I: *Statique. Dynamique du point.*

Tome II: *Dynamique des systèmes. Mécanique analytique.*

Tome III: *Équilibre et Mouvement des milieux continus.*

L'origine de ce Traité est le Cours de Mécanique rationnelle professé par M. P. APPELL à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris et d'abord lithographié (voir n<sup>o</sup> 1, p. 46). L'Auteur a été conduit

naturellement à élargir le cadre d'un cours de licence pour y faire entrer toutes les parties de la Mécanique rationnelle qui doivent aujourd'hui être considérées comme classiques, avec les renseignements et les indications bibliographiques nécessaires à ceux qui désirent approfondir une question, en vue de recherches personnelles. Ce *Traité* comprend trois Volumes.

Le *Premier Volume* est consacré à la théorie des vecteurs, à la statique des systèmes dont la position dépend d'un nombre fini de paramètres, puis à l'équilibre des fils et des lignes élastiques, enfin à la dynamique du point. Dans la première édition, les principes de la Mécanique sont exposés sous une forme qui se rapproche de celle que BONNET avait adoptée dans ses *Leçons de Mécanique* en vue de l'examen d'entrée à l'École Polytechnique. La deuxième édition présente des changements notables: d'abord, pour les Principes de la Mécanique, M. P. APPELL a adopté, dans ses grands traits, le mode d'exposition que M. BLONDLOT, professeur à l'Université de Nancy, a communiqué au Congrès de Philosophie tenu à Paris en 1900. Puis, en Statique, se trouvent ajoutées à la suite de l'équilibre des fils quelques pages sur l'équilibre de l'élastique plane. Dans l'établissement des équations générales d'équilibre déduites du théorème des travaux virtuels, il a introduit, d'après le physicien HERTZ, la distinction importante des systèmes en deux classes: les systèmes *holonomes*, pour lesquels toutes les liaisons peuvent être exprimées par des relations en *termes finis* entre les coordonnées, et les systèmes *non holonomes*, comme le cerceau ou la bicyclette, pour lesquels certaines liaisons sont exprimées *par des relations différentielles non intégrables*. Ensuite, il a consacré un paragraphe entièrement nouveau à l'étude des conditions d'équilibre d'un système pour lequel certaines liaisons sont *unilatérales*; les systèmes de cette nature se présentent fréquemment en Mécanique rationnelle, par exemple, toutes les fois que des liaisons se trouvent réalisées à l'aide de fils; ils semblent se présenter également dans certains équilibres physico-chimiques. Enfin, la Dynamique analytique du point (équations de LAGRANGE, équations canoniques, théorème de JACOBI, applications mécaniques et géométriques) est exposée en détail, de façon à réunir en un même Volume tout ce qui se rapporte au point matériel. Dans la troisième édition, l'Auteur présente d'abord la théorie des vecteurs, sous une forme entièrement renouvelée, dont le point de départ est dans ce fait, que l'on rencontre dans les applications trois catégories de vecteurs. La première catégorie comprend des vecteurs qui sont définis en grandeur, direction et sens, mais dont le point d'application peut être pris arbitrairement dans l'espace, comme pour les vecteurs représentant des axes de couples appliqués à un solide: il appelle les vecteurs de cette catégorie *vecteurs non localisés* (*unlocalised*, suivant l'expression employée par M. LOVE dans sa *Theoretical Mechanics*) ou encore *vecteurs libres*. Dans la deuxième catégorie figurent des vecteurs définis en grandeur, direction et sens, pouvant glisser arbitrairement sur la droite qui les porte: tels sont les vecteurs qui représentent des forces appliquées à un solide: il les nomme *vecteurs localisés sur une droite* ou *vecteurs glissants*. Et, dans la troisième catégorie, figurent les vecteurs qui ont un point d'application déterminé, comme les vecteurs représentant les vitesses de points mobiles ou les forces d'un champ; ces vecteurs sont *localisés en un point* ou *liés à leur point d'application*. En outre, il introduit la distinction, si importante en Physique, entre les vecteurs *axiaux* et les vecteurs *polaires*. Comme exercice sur le mouvement d'un point, il a étudié les cas les plus simples du mouvement d'une particule électrisée, soumise à l'action d'un champ électrique et d'un champ magnétique superposés. Ce problème a conduit MM. HENRI POINCARÉ, CARL STÖRMER et M. FORTIN à des recherches mathématiques intéressantes, inspirées par les expériences de MM. BIRKELAND et VILLARD et par les idées de MM. BIRKELAND et ARRHÉNIUS sur l'origine des aurores polaires.

La première édition du *Deuxième Volume* renferme, après la Dynamique analytique du point, les théorèmes généraux sur le mouvement des systèmes, avec de nombreuses applications, notamment au mouvement du corps solide. Les problèmes classiques, problème de POINSOT, problème de LAGRANGE et de POISSON se trouvent traités en détail, avec intégration par les fonctions elliptiques. Le problème de M<sup>me</sup> KOWALESKY est exposé. Sont données ensuite les théories du frottement de glissement et du frottement de roulement. Les équations de LAGRANGE, les équations canoniques, le théorème de JACOBI sont exposés avec de nombreuses applications. Viennent enfin le théorème de POISSON, les invariants intégraux de M. H. POINCARÉ, les

recherches analytiques de M. G. KOENIGS et, dans la théorie du mouvement relatif, l'exposé de la méthode mixte de GILBERT avec application au barogyroscope. La deuxième édition, allégée par la suppression de la Dynamique analytique du point (insérée dans le 1<sup>er</sup> Volume), contient les recherches de HERTZ sur les systèmes non holonomes; M. P. APPELL y joint un exposé de ses propres recherches sur une forme nouvelle des équations de la Mécanique, applicable à tous les systèmes, holonomes ou non, et fondée sur la considération de l'énergie d'accélération  $\frac{1}{2}\sum m\dot{m}^2$ . La théorie du frottement est complétée par l'exposé des recherches de M. PAUL PAINLEVÉ sur les contradictions qui peuvent se présenter, quand on veut appliquer rigoureusement les lois du frottement de glissement énoncées par COULOMB. La troisième édition du Deuxième Volume est sous presse.

Le *Troisième Volume* se rapporte à la mécanique des systèmes continus: théorie de l'attraction, cinématique des milieux continus, hydrostatique, hydrodynamique, théorie des tourbillons, élasticité, viscosité. L'Auteur a présenté très simplement la théorie de l'équilibre des corps flottants, d'après une méthode dont on trouve les germes dans HUYGENS et qui a été développée par le commandant GUYOU. Il a exposé les méthodes de RIEMANN et de HUGONOT pour la propagation des discontinuités dans les fluides, et la généralisation de ces méthodes par M. J. HADAMARD. Enfin, en élasticité, M. P. APPELL a donné un résumé des recherches de MM. E. et F. COSSERAT, qui ont conduit à d'importantes publications. A la fin de la seconde édition se trouve insérée une Note sur l'*Action Euclidienne* due à ces deux mathématiciens, résumant, sous un point de vue entièrement nouveau, toutes les parties de la Mécanique rationnelle. L'analyse de cette seconde édition se trouve dans la Préface et dans la présentation que M. P. APPELL a faite à l'Académie des Sciences dans la séance du 18 janvier 1909.

49

Paris, G.-V., gr. in-8: t. I, 1893, VI-549 p.; 2<sup>e</sup> éd., 1902, IX-601 p.; 3<sup>e</sup> éd., 1909, X-615 p.; t. II, 1896, IV-538 p.; 2<sup>e</sup> éd., 1904, VIII-551 p.; 3<sup>e</sup> éd. (*sous presse*); t. III, 1903, IV-558 p.; 2<sup>e</sup> éd., 1909, Préf. du 15 oct. 1908, VII-645 p.

Présentation par M. P. APPELL à l'Académie des Sciences du t. III, de la 2<sup>e</sup> éd. du t. I, de la fin du t. III, de la 2<sup>e</sup> éd. du t. II, de la 2<sup>e</sup> éd. du t. III: C R, t. 134, 12 mai 1902, p. 1095-1096;—t. 135, 6 oct. 1902, p. 521-522;—t. 137, 2 nov. 1903, p. 682-684;—t. 148, 18 janv. 1909, p. 143-144.

Analyse par E. LAMPE de la 1<sup>re</sup> éd. des t. I, II, III: J F M, Bd. 24, J. 1892, S. 803-804;—Bd. 27, J. 1896, S. 566-567;—Bd. 34, J. 1903, S. 727-728.

Analyse par G. KOENIGS du t. I: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 18, 1<sup>re</sup> p., avr. 1894, p. 69-80.

Analyse de la 1<sup>re</sup> édit. des t. I, II: M M P, 6 J., 1895, Lit., S. 29;—7. J., 1896, Lit., S. 57-58.

Analyse par REHOROVSKY de la 1<sup>re</sup> édit. des t. I et II: C M F, R. 27, 1898, p. 204-208.

Analyse par A. BUHL du t. III: E M, 5<sup>e</sup> a., 15 mars 1903, p. 142-146.

Analyse par H. VOGT de la 1<sup>re</sup> édit. du t. III, de la 2<sup>e</sup> édit. des t. I et II: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 28, 1<sup>re</sup> p., janv., fév. 1904, p. 5-14, 33-39.

Analyse par C. BOURLET du t. III: N A M, 4<sup>e</sup> s., t. 4, avr. 1904, p. 172-178.

Analyse par von H. de la 1<sup>re</sup> édit. du t. III: L C D, 56. J., 18 nov. 1905, S. 1585.

#### 4. PRÉCIS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE PAR P. APPELL ET S. DAUTHEVILLE.

*Introduction à l'Étude de la Physique et de la Mécanique appliquée.*

A l'usage des Candidats aux Certificats de Licence et des Élèves des Écoles techniques supérieures.

Paris, G.-V., 1910, gr. in-8, VI-729 p.

#### 5. COURS DE MÉCANIQUE.

A l'usage des Candidats à l'École Centrale des Arts et Manufactures.

Paris, G.-V., 1902, in-8, IV-271.

Analyse par J. TANNERY: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 26, 1<sup>re</sup> p., oct. 1902, p. 285-288.

Analyse par von H.: L C D, 53. J., 30 Aug. 1902, S. 1171.

Analyse par E. LAMPE: J F M, Bd. 33, J. 1902, S. 710-711.

Analyse: Ms, 3<sup>e</sup> s., t. 2, 1902, p. 69-70.

Analyse: M M P, 13. J., 1902, Lit., S. 36.

Analyse par J. HADAMARD: R O, t. 14, 15 juil. 1903, p. 728.

#### 6. COURS DE MÉCANIQUE.

A l'usage des Élèves de la Classe de Mathématiques spéciales, conforme au Programme du 27 juillet 1904.

Paris, G.-V., in-8. 2<sup>e</sup> édit., 1905, IV-493 p.

Analyse par H. FEHR: E M, 8<sup>e</sup> a., 15 mars 1906, p. 163-164.

Analyse par von H.: L C D, 57. J., 24 März 1906, S. 464.

Analyse: Ms, 3<sup>e</sup> s., t. 7, mars 1907, p. 72.

#### 7. LEÇONS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE, PAR P. APPELL ET J. CHAPPUIS.

A l'usage des Élèves des Classes de Première (Latin-Sciences ou Sciences-Langues vivantes). Conformément aux Programmes du 31 mai 1902.

Paris, G.-V., 1903, in-16, VIII-177 p.

Analyse par C. BOURLET: N A M, 4<sup>e</sup> s., t. 3, fév. 1903, p. 81-83.

Analyse par E. LAMPE: J F M, Bd. 34, J. 1903, S. 728-729.

Analyse: Ms, 3<sup>e</sup> s., t. 3, 1903, p. 87-88, 113-116.

Analyse par PAUL STAECKEL: Z M P, 49. Bd., 1903, S. 470-472.

Analyse par A.-S. GALE: B A M S, v. 15, 1903-1904, p. 359-360.

Analyse par ED. DÉMOLIS: R O, t. 15, 15 janv. 1904, p. 39.

Analyse par F. HASENÖHRL: M M P, 15. J., 1904, Lit., S. 31.

#### 8. LEÇONS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE, PAR P. APPELL ET J. CHAPPUIS.

A l'usage des Classes de Première C et D. Conformes aux Programmes du 31 mai 1902.

Paris, A. C. et G.-V., 15 sept. 1902, in-16, VIII-177 p.;—Paris, G.-V., 2<sup>e</sup> édit., 1905, VIII-177 p.

Analyse par ST. M.: M M P, 17. J., 1906, Lit., S. 32.

Analyse par GINO LORIA: B B S L, Anno 10, fasc. 1<sup>o</sup>, 1906, p. 22-24.

#### 9. LEÇONS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE, PAR P. APPELL ET J. CHAPPUIS.

A l'usage des Classes de Mathématiques A et B. Conformément aux Programmes du 31 mai 1902 (Arrêtés des 27, 28 juillet et 8 septembre 1905).

Paris, G.-V., 1905, in-16, IV-306 p.

Analyse par H. FEHR: E M, 8<sup>e</sup> a., 15 mars 1906, p. 163-164.

Analyse par K.: L C D, 57. J., 28 Juli 1906, S. 1074-1075.

Analyse par GINO LORIA: B B S L, Anno 10, fasc. 1<sup>o</sup>, 1906, p. 22-24.

Analyse par J. N.: M M P, 17. J., 1906, Lit., S. 32.

Analyse: Ms, 3<sup>e</sup> s., t. 7, mars 1907, p. 72.

#### 10. LEÇONS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE, PAR P. APPELL ET J. CHAPPUIS.

A l'usage des Classes de Mathématiques A et B. Conformément aux Programmes de 1905.

1<sup>re</sup> Partie: *Notions géométriques. Cinématique.*

**11. LES MOUVEMENTS DE ROULEMENT EN DYNAMIQUE.**

Cet Ouvrage contient l'exposé et le développement des méthodes qui sont employées pour étudier les mouvements de roulement, des difficultés qui se présentent dans l'application des équations de LAGRANGE, avec l'indication d'une nouvelle forme d'équations permettant d'éviter ces difficultés.

Paris, G. C. puis G.-V., in-8, 70 p. (Collection *Scientia*).

Analyse par E. LAMPE: J F M, Bd. 30, J. 1899, S. 642.

Analyse: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 24, 1<sup>re</sup> p., avr. 1900, p. 81-83.

**MÉMOIRES. NOTES.**

**Mécanique rationnelle.**

**1. Sur une interprétation des valeurs imaginaires du temps en Mécanique.**

C R, t. 87, 30 déc. 1878, p. 1074-1077.

**2. Remarques sur l'introduction de fonctions continues n'ayant pas de dérivée, dans les éléments de la Mécanique.**

En commun avec M. JANAUD.

C R, t. 93, 12 déc. 1881, p. 1005-1008.

**3. Sur la chaînette sphérique.**

M. P. APPELL donne, pour exprimer les coordonnées d'un point de la chaînette sphérique en fonctions elliptiques d'un paramètre, une méthode qui revient à l'intégration d'une équation analogue à celle de LAMÉ.

B S M F, t. 13, 1884-1885, 4 fév. 1885, p. 65-71.

Exercice de préparation à l'Agrégation des Sciences mathématiques, sous le titre *Forme d'équilibre d'un fil homogène pesant sur une sphère. Expressions des coordonnées d'un point du fil et de l'arc au moyen des fonctions de JACOBI*: N A M, 4<sup>e</sup> s., t. 2, fév. 1902, p. 76.

52

**4. 5. De l'homographie en Mécanique.**

M. P. APPELL emploie en Mécanique la méthode de transformation des figures par projection centrale, qui joue un rôle si important en Géométrie. Il étudie d'abord le cas d'un point matériel sollicité par une force dans un plan fixe; il termine ainsi: «Ces considérations peuvent être étendues au mouvement d'un point dans l'espace et même au mouvement de plusieurs points, à condition de faire, dans ce dernier cas, une transformation homographique générale contenant à la fois les coordonnées de tous les points».

C R, t. 108, 4 fév. 1889, p. 224-226.

A J M, v. 12, 1890, p. 103-114.

Analyse par E. LAMPE: J F M, Bd. 21, J. 1889, S. 904-905.

**6. Sur une transformation de mouvement et les invariants d'un système en Mécanique.**

B S M F, t. 20, 16 mars 1892, p. 21-22.

Analyse par E. LAMPE des Notes n<sup>os</sup> 6 et 7: J F M, Bd. 24, J. 1892, S. 857-858.

**7. Sur des transformations de mouvement.**

M. P. APPELL considère deux systèmes matériels dont les liaisons sont indépendantes du temps et cherche si, à tout mouvement du premier



système, on peut faire correspondre un mouvement du second, les forces ne dépendant que des positions.

J C, Bd. 110, Ht. 1, 1892, S. 37-41.

**8. Sur une transformation de mouvements.**

M. P. APPELL étudie une certaine transformation de mouvements, puis il montre qu'un problème traité par ELLIOT (C R, t. 116, 1893, p. 1117; A S E N, 1893, p. 231) et une question résolue par M. MESTSCHERSKY (B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 18, 1894, p. 170), peuvent être envisagés comme des cas particuliers de cette transformation.

A J M, v. 17, n<sup>o</sup> 1, 1895, p. 1-5.

**9. Réduction à la forme canonique des équations d'équilibre d'un fil flexible et inextensible.**

M. P. APPELL ramène, à une forme canonique permettant l'application des théorèmes de JACOBI, les nombreuses analogies qui existent entre les équations d'équilibre d'un fil et les équations du mouvement d'un point.

C R, t. 96, 12 mars 1883, p. 688-691.

**10. Sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible.**

A F S T, t. 1, 1887, p. B.1-B.5.

**11. Sur certaines propriétés d'une position d'équilibre d'un système.**

A F S T, t. 6, 1892, p. C.1-C.6.

Analyse par R. LE VASSEUR: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 18, 2<sup>e</sup> p., août 1894, p. 155-156.

**12. 13. Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe.**

M. P. APPELL ramène l'intégration des équations du mouvement d'un fil flexible et inextensible dans un plan à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

C R, t. 103, 22 nov. 1886, p. 991-993.

A M, t. 12, 1888-1889, 17 sept. 1888, p. 1-50.

Analyse par SCHUMANN: J F M, Bd. 20, J. 1888, S. 953-954.

Analyse par E. COSSERAT: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 16, 2<sup>e</sup> p., mars 1892, p. 38-39.

**14. Quelques remarques sur les équations du mouvement d'une chaîne parfaitement flexible.**

A S A P P, v. 4, n<sup>o</sup> 1<sup>o</sup>, n<sup>o</sup> 2<sup>o</sup>, 1909, p. 9-17, 113-115.

**15. Remarque sur les courbes brachistochrones.**

B S M F, t. 19, 1890-1891, 6 mai 1891, p. 97-98.

**16. Du tautochronisme dans un système matériel.**

Un système matériel est *tautochrone* lorsqu'il met le même temps à revenir à une position déterminée quelle que soit la position initiale dans laquelle on l'abandonne à lui-même sans vitesse. M. P. APPELL indique la solution générale du problème des tautochrones.

C R, t. 114, 2 mai 1892, p. 996-998.

Analyse par E. LAMPE: J F M, Bd. 24, J. 1892, S. 869-870.

**17. Remarque sur une Note de M. G. DI PIRRO,**

Intitulée *Sur les intégrales quadratiques des équations de la Dynamique.*

C R, t. 123, 14 déc. 1896, p. 1057.

**18. Remarques sur une Note de M. LEVI-CIVITA,**

Intitulée *Sur les intégrales quadratiques des équations de la Mécanique.*

C R, t. 124, 22 fév. 1897, p. 395.

**19. Sur les équations de LAGRANGE et le principe d'HAMILTON.**

Il s'agit d'un genre particulier de liaisons qui ne peuvent pas être

exprimées en termes finis; et auxquelles les équations de LAGRANGE ne peuvent pas être en général appliquées.

B S M F, t. 26, 7 déc. 1898, p. 265-267.

**20.** *Sur les mouvements de roulement; équations du mouvement analogues à celles de LAGRANGE.*

C R, t. 129, 7 août 1899, p. 317-320.

Analyse par E. LAMPE: J F M, Bd. 30, J. 1899, S. 641.

**21. 22.** *Sur une forme générale des équations de la Dynamique.*

Cette forme d'équations s'applique à tous les systèmes sans frottement, holonomes ou non; elle repose sur la considération de l'énergie d'accélération  $\frac{1}{2}\sum mJ^2$ , où J est l'accélération du point m.

C R, t. 129, 28 août 1899, p. 423-427.

J C, Bd. 121, Ht. 4, 1900, S. 310-319.

Analyse par E. LAMPE: J F M, Bd. 31, J. 1900, S. 692.

**23.** *Sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique.*

C R, t. 129, 11 sept. 1899, p. 459-460.

**24.** *Développements sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique.*

J L, 5<sup>e</sup> s., t. 6, f. 1, 1900, p. 5-40.

Analyse par E. LAMPE: J F M, Bd. 31, J. 1900, S. 693.

Analyse par L. R.: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 29, 2<sup>e</sup> p., déc. 1905, p. 204-206.

**25.** *Sur une forme générale des équations de la Dynamique et sur le principe de GAUSS.*

M. P. APPELL démontre l'impossibilité de déduire les équations du mouvement d'un système non holonome de la seule connaissance de la demi-force vive T et de la fonction des forces U.

J C, Bd. 122, Ht. 3, 1900, S. 205-208.

**26.** *Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la Dynamique.*

J L, 5<sup>e</sup> s., t. 7, f. 1, 1901, p. 5-12.

Analyse par L. R.: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 30, 2<sup>e</sup> p., nov., déc. 1906, p. 196-198.

**27.** *Sur le principe de la moindre contrainte de GAUSS.*

A M L B, 1901-1902, p. 407-412.

**28.** *Extension des équations de LAGRANGE au cas du frottement de glissement.*

C R, t. 114, 15 fév. 1892, p. 331-334.

Analyse par E. LAMPE: J F M, Bd. 24, J. 1892, S. 856-857.

**29.** *Sur l'extinction du frottement.*

M. P. APPELL étudie le problème de l'extinction du frottement dans le cas d'un système matériel présentant certains caractères qui sont réalisés dans la plupart des systèmes usuels.

B S M F, t. 35, 11 avr. 1907, p. 131-133.

**30.** *Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement.*

M. P. APPELL développe et précise les indications qu'il a données dans la Note n<sup>o</sup> 29. Voir, comme suite à cette Note, une Note de M. E. DANIELE (N. C., s. 5, v. 15, Giugno 1908, p. 492).

J C, Bd. 133, Ht. 2, 1907, S. 93-96.

**31.** *Sur un théorème relatif au déplacement initial d'un système sans frottement.*

A F A S, II, *Résumés*, Clermont-Ferrand, 1908, gr. in-8, p. 49.

**32. 33.** *Sur l'emploi des équations de LAGRANGE dans la théorie du choc et des percussions.*

Pour un système holonome, M. P. APPELL déduit des équations de

LAGRANGE une forme simple des équations de la théorie des percussions.

C R, t. 116, 26 juin 1893, p. 1483-1487.

J L, 5<sup>e</sup> s., t. 2, f. 1, 1896, p. 5-20.

Analyse par E. LAMPE: J F M, Bd. 25, J. 1893 u. 1894, S. 1375-1376.

**34. Remarques sur les systèmes non holonomes.**

A propos d'une Note intitulée *Sur les percussions dans les systèmes non holonomes*, par MM. BEGHIN et ROUSSEAU (J L, 1903, p. 21).

J L, 5<sup>e</sup> s., t. 9, f. 1, 1903, p. 27-28.

**35. 36. Sur le théorème des aires.**

Imaginons un système sollicité par des forces intérieures telles que la somme de leurs moments par rapport à un axe fixe Oz soit nulle. Alors, si le système part du repos, la somme

$$\sum mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

reste nulle. Mais, malgré cette condition, si le système n'est pas rigide, il peut, par des déformations successives et sans subir de torsions, partir d'une configuration déterminée et revenir à une configuration identique, déduite de la première par une rotation autour de Oz. C'est ce que MM. GUYOU et MAURICE LEVY ont établi dans des Notes présentées à la dernière séance (p. 717, 718). Je me propose, au point de vue de l'enseignement, d'en indiquer un exemple élémentaire que j'avais communiqué à plusieurs de nos confrères dans la dernière séance. P. A.

C R, t. 119, 5 nov. 1894, p. 770-771.

B S M F, t. 22, nov. 1894, p. 190-195.

**37. Sur le mouvement d'un point en coordonnées elliptiques.**

B S M F, t. 19, 1890-1891, 20 mai 1891, p. 102-103.

**38. Sur les lois de forces centrales faisant décrire à leur point d'application une conique, quelles que soient les conditions initiales.**

A J M, v. 13, 1891, p. 153-158.

Analyse par J. HADAMARD: R O, t. 2, 30 mars 1891, p. 190.

**39. Interprétation de la période imaginaire dans un mouvement à la POINSOT.**

B S M F, t. 26, 15 juin 1898, p. 98-102.

**40. Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau.**

R C M P, t. 14, 1900, 27 juil. 1899, p. 1-6.

Voir *Extrait d'une Lettre adressée à M. P. APPELL par M. D. J. K. KORTEWEG*: R C M P, t. 14, 1900, p. 7-8.

**41. Sur l'équation différentielle du mouvement d'un projectile sphérique pesant dans l'air.**

A M P G, d. R., 5 Bd., 15 mars 1903, S. 177-179.

**42. Remarque relative à un Mémoire de M. LUCIO SILLA,**

Intitulé *Sopra alcune quistioni di Statica*.

R C M P, t. 21, 10 fév. 1906, p. 314-315.

**43. Sur les lignes qui se conservent dans la déformation d'un milieu continu.**

B S M F, t. 26, 6 juil. 1898, p. 135-136.

**44. Lignes correspondantes dans la déformation d'un milieu; extension des théorèmes sur les tourbillons.**

J L, 5<sup>e</sup> s., t. 5, f. 2, 1899, p. 137-153.

Analyse par F. KÖTTER: J F M, Bd. 30, J. 1899, S. 681-683.

**45. Déformation spéciale d'un milieu continu; tourbillons de divers ordres.**

B S M F, t. 29, 1901, 21 nov. 1900, p. 16-17.

**46.** *Sur les expressions des tensions en fonction des déformations dans un milieu élastique homogène et isotrope.*

N A M, 4<sup>e</sup> s., t. 2, mai 1902, p. 193-197.

**47.** *Note sur les expériences du commandant HARTMANN.*

Exposées dans un Mémoire intitulé *Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts* (Revue d'Artillerie, t. 45, 46, 47, 1894, 1895, 1896).

B S M F, t. 28, 17 janv. 1900, p. 66-68.

**48.** *Sur quelques fonctions et vecteurs de points dans le mouvement d'un fluide.*

C R, t. 136, 26 janv. 1903, p. 186-189.

**49.** *Sur quelques fonctions de point dans le mouvement d'un fluide.*

J L, 5<sup>e</sup> s., t. 9, f. 1, 1903, p. 5-19.

Analyse par E. LAMPE: J F M, Bd. 34, J. 1903, S. 802-803.

Analyse par L. R.: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 30, 2<sup>e</sup> p., déc 1906, p. 217-218.

**50.** *Sur les fonctions et vecteurs de point contenant uniquement les dérivées premières des composantes de la vitesse.*

B S M F, t. 31, 1903, p. 68-73.

**51.** *Sur les positions d'équilibre d'un navire avec un chargement liquide.*

C R, t. 129, 16 oct. 1899, p. 567-569.

**52.** *Équilibre d'un flotteur avec un chargement liquide.*

C R, t. 129, 23 oct. 1899, p. 636-637.

**53.** *Remarques sur une Note de M. P. DUHEM,*

Intitulée *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants, et, en particulier, d'un navire qui porte un chargement liquide.*

C R, t. 129, 27 nov. 1899, p. 880.

**54.** *Sur l'équilibre d'un flotteur avec un chargement liquide.*

J E P, 2<sup>e</sup> s., 5<sup>e</sup> c., 1900, p. 101-117.—R Ma, t. 148, 1901, p. 5-20.

**55. 56.** *Équation fonctionnelle pour l'équilibre d'une masse liquide en rotation sous l'attraction newtonienne.*

S S S, 48<sup>e</sup> Congrès, Paris, 30 mars 1910, p. 20-23.

R C M P, t. 30, 2 Apr. 1910, p. 82-84.

**57.** *Machine à déterminer les balourds.*

Les roues des wagons de chemins de fer sont associées par paires: les deux roues d'une même paire sont réunies par un cylindre rigide, de façon à former un solide de révolution autour de l'axe de ce cylindre. La paire de roues ainsi constituée est liée au wagon de telle façon que son mouvement relatif, par rapport au wagon, soit une rotation autour de l'axe commun des deux roues. Une condition essentielle de stabilité est alors que cet axe soit un axe principal d'inertie relatif au centre de gravité. Des méthodes statiques permettent de voir si le centre de gravité est sur l'axe commun des deux roues; mais ce n'est que par des expériences dynamiques que l'on peut voir si cet axe est principal pour le centre de gravité et, par conséquent, pour chacun de ses points. Supposons que l'axe ne soit pas un axe principal d'inertie et, pour simplifier, supposons qu'il puisse être rendu principal en enlevant à la roue R une masse  $m$ , placée en un point M de cette roue, et à la roue  $R_1$  une masse  $m_1$ , placée en  $M_1$ . On dit alors que la roue R présente un *balourd*  $m$  et la roue  $R_1$  un *balourd*  $m_1$ . P. A.

Un appareil a été imaginé par M. HAFFNER pour déterminer la position et la masse des balourds: M. P. APPELL fait la théorie de cet appareil.

J E P, 2<sup>e</sup> s., 9<sup>e</sup> c., 1904, p. 151-162.

Analyse par E. LAMPE: J F M, Bd. 35, J. 1904, S. 737.

**1. Sur la théorie de la chaleur.**

C R, t. 110, 27 mai 1890, p. 1061-1066.

Analyse par SIEBERT: J F M, Bd. 22, J. 1890, S. 1184.

**2. Sur l'équation**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ et la théorie de la chaleur.}$$

J L, 4<sup>e</sup> s., t. 8, f. 2, 1892, p. 187-216.

Analyse par SCHAFHEITLIN: J F M, Bd. 24, J. 1892, S. 373-374.

**3. Sur la distribution du potentiel dans des masses liquides limitées par des faces planes.**

Dans cette Note, M. P. APPELL, à la suite d'une correspondance qu'il a échangée avec M. CHERVET, s'occupe de la distribution du potentiel d'une masse liquide indéfinie, soit limitée par deux plans parallèles, soit ayant la forme d'un prisme droit à base rectangle ou d'un parallélépipède rectangle, les électrodes étant placées d'une façon quelconque. Le potentiel est alors une fonction uniforme de  $x, y, z$ , ayant deux groupes de périodes et admettant une infinité de pôles simples dans la section droite des deux électrodes.

C R, t. 98, 28 janv. 1884, p. 214-216.

**4. Sur la distribution du potentiel dans une masse liquide ayant la forme d'un prisme rectangulaire indéfini.**

En commun avec M. CHERVET.

C R, t. 98, 11 fév. 1884, p. 358-360.

**5. Sur quelques applications de la fonction  $Z(x, y, z)$  à la Physique mathématique.**

Cette fonction  $Z$  a été définie dans le Mémoire n<sup>o</sup> **101**, p. 36.

A M, t. 8, 23 mars 1886, p. 265-294.

Analyse par J. TANNERY: B S M, 2<sup>e</sup> s., t. 14, 2<sup>e</sup> p., avr. 1890, p. 71-72.

**6. Mouvement d'une particule électrisée soumise à l'action d'un point électrique et d'un pôle magnétique confondus.**

A S A P P, v. 4, n<sup>o</sup> 3<sup>o</sup>, 1909, p. 129-131.

## SECTION V.

**HISTOIRE DES SCIENCES.****DISCOURS.****1. Sur quelques questions de Mécanique rationnelle.**

Adresse lue par M. P. APPELL au Congrès de Cherbourg de l'Association française pour l'Avancement des Sciences, dans la séance générale du 4 août 1905.

A F A S, *Bulletin mensuel*, n<sup>o</sup> 8, oct. 1905, p. 267-278.

Résumé par E. LEBON: E M, 7<sup>e</sup> a., 15 sept. 1905, p. 407.

Analyse par E. LAMPE: J F M, Bd. 36, J. 1905, S. 742.

**DISCOURS NÉCROLOGIQUES.**

1 à 5. *Discours prononcés par M. P. APPELL,*

En qualité de Doyen de la Faculté des Sciences de Paris, aux obsèques de:

M. DAGUILLON, *le 19 juillet 1908.*

R B B, 1911.

M. FRANÇOIS, *le 18 mars 1908.*

B S F B, t. 42, 25 mars 1909, p. LXXXVIII-LXXXIX.

M. JULES BONNIER, *le 11 mai 1908.*

B S F B, t. 42, 25 mars 1909, p. LXXVII (*verso*), LXXX.

M. HENRI PELLAT, *le 22 décembre 1909.*

*Plaque*: HENRI PELLAT 1850-1909, Paris, in-8, p. 7-10.

M. LOUIS RAFFY, *le 11 juillet 1910.*

B S M F, t. 38, 1910, Supplément, p. 243-246.

R I E, t. 50, 15 sept. 1910, p. 252-253.

61

## NOTICES NÉCROLOGIQUES.

1. *Notice sur la Vie et les Travaux de PIERRE-OSSIAN BONNET.*

C R, t. 117, 26 déc. 1893, p. 1014-1024.

I F, 1903, 10<sup>bis</sup>, Paris, G.-V., 1907, gr. in-8, 15 p.

2. *Sur CHARLES HERMITE.*

RO, t. 12, 15 fév. 1901, p. 109-110.

3. *Sur PAUL HAUTEFEUILLE, MUNIER CHALMAS; ÉMILE DUCLAUX; HENRI DUFET; PIERRE CURIE; MOISSAN; GIARD, DAGUILLON, FRANÇOIS, JULES BONNIER; DITTE, BOUVEAULT, KROUCHKOLL.*

U P R, 1902-1903, p. 89-90, 89-92;—1903-1904, p. 93-94;—1904-1905, p. 83-84;—1905-1906, p. 71-72;—1906-1907, p. 93-94;—1907-1908, p. 79-80, 80-81, 81, 81, 81-82; 1908-1909, p. 125-126, 126, 126-127.

## RAPPORTS.

1 à 3. *Rapports sur divers Concours de Prix décernés par l'Académie des Sciences.*

Prix BORDIN (Géométrie):

C R, t. 115, 19 déc. 1892, p. 1122-1126.

Prix BORDIN (Géométrie). (En commun avec MM. H. POINCARÉ et E. PICARD):

C R, t. 119, 17 déc. 1894, p. 1051-1056.

Prix FOURNEYRON (Mécanique):

C R, t. 127, 19 déc. 1898, p. 1078-1079.

## ARTICLES.

62

1. *La Vie et l'Œuvre de JACOBI.*

Analyse de l'Ouvrage intitulé: CARL GUSTAV JACOB JACOBI, *von* LEO KOENIGSBERGER, Festschrift zur Feier der hundersten Wiederkehr seines Geburtstages (Leipzig, B. G. T., 1904, in-8).

J S, n. s., 4<sup>e</sup> a., mars 1906, p. 132-138.

2. *La Géométrie descriptive en 1612.*

R M, 4<sup>e</sup> a., t. 8, 10 déc. 1909, p. 728-729.

SECTION VI.

ÉDUCATION ET ENSEIGNEMENT.

DISCOURS.

1. *A la Réception des Universités Françaises par l'Université de Londres,*

Discours prononcé par M. P. APPELL, en qualité de Doyen de la Faculté des Sciences de Paris.

R I E, t. 51, 15 juil. 1906, p. 587-591.

2. 3. *A la Distribution solennelle des Prix du Lycée SAINT-LOUIS en 1904, et à la Séance solennelle de fin d'année de l'École Alsacienne en 1906,*

Discours prononcés par M. P. APPELL, en qualité de Président.

*Palmarès* du Lycée Saint-Louis, à Paris, 30 juil. 1904, in-8, p. XVIII-XXII.

—Reproduction sous le titre *Comment il faut étudier les Sciences*: R I E, t. 48, 15 août 1904, p. 109-112.

*Palmarès* de l'École Alsacienne, à Paris, 12 juil. 1906, in-8, p. 22-25.

4. *Au Banquet des anciens Élèves de l'Institut de Chimie appliquée de l'Université de Paris,*

Discours prononcé par M. P. APPELL le 27 décembre 1906.

*Annuaire*, Paris, 1907, in-8, p. 51-53.

5. *L'Enseignement scientifique à l'Université de Paris,*

Discours prononcé le 7 juin 1906 à la réunion organisée par l'Université de Londres en l'honneur des Universités Françaises.

E M, 8<sup>e</sup> a., 15 sept. 1906, p. 327-342.

6. 7. *Aux 59<sup>e</sup> et 60<sup>e</sup> Réunions générales annuelles de l'Association amicale de Secours des anciens Élèves de l'École Normale supérieure,*

Discours prononcés par M. P. APPELL, en qualité de Président du Conseil d'administration, le 13 janvier 1907 et le 12 janvier 1908.

A E N, 1907, 1908, p. 1-5, 1-5.

8. *L'Enseignement des Sciences et la Formation de l'esprit scientifique,*

Discours d'Ouverture du Congrès de Clermont-Ferrand, prononcé le 3 août 1908 par M. P. APPELL, en qualité de Président de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences.

A F A S, II, *Résumés*, Clermont-Ferrand, 1908, gr. in-8, p. 2-12.

R R, 46<sup>e</sup> a., 5<sup>e</sup> s., t. 10, 8 août 1908, p. 161-166.

R M, t. 6, 10 août 1908, p. 129-139.

9. 10. *A l'Inauguration du Monument BICHAT,*

Et des nouveaux Instituts de la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy, le 13 juin 1909.

Allocution aux Etudiants et Toast au Banquet prononcés par M. PAUL APPELL, Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, en qualité de Vice-Président du Conseil de l'Université de Paris.

I M B, p. 53-54, 67-69.

11. *Sur l'Administration de M. G. DARBOUX,*

Doyen de la Faculté des Sciences de Paris du 12 novembre 1889 au 4

mars 1903,

Allocution prononcée par M. P. APPELL en qualité de Doyen de la Faculté des Sciences, au Conseil de la Faculté, en 1903.

U P R, 1902-1903, p. 93.

**12. Félicitations à M. LOUIS LIARD,**

Vice-Recteur de l'Académie de Paris, à l'occasion de sa promotion à la dignité de Grand-Croix dans l'ordre de la Légion d'honneur,

Adressées par M. P. APPELL, en qualité de Vice-Président du Conseil de l'Université de Paris, le 26 juillet 1909.

*Le Temps*, Paris, 49<sup>e</sup> a., n<sup>o</sup> 17562, 28 juil. 1909, in-fol., p. 2.

R I E, t. 58, 15 sept. 1909, p. 193-194.

## CONFÉRENCE.

65

**1. L'Enseignement supérieur des Sciences,**

Conférence faite à l'École des Hautes Études sociales le 11 février 1904.

R O, t. 15, 30 mars 1904, p. 287-299; Lettre de M. C. COLSON, p. 299-303.

*Enseignement et Démocratie*, Paris, F. A., 1905, gr. in-8, p. 209-288.

La Conférence a été suivie d'une discussion portant sur les passages relatifs à la préparation aux Écoles techniques. Les principales observations formulées au cours de la discussion ont été résumées par M. CLÉMENT COLSON dans une Lettre qu'il a adressée à M. P. APPELL, sur sa demande, et où il tient compte d'observations de M. ALFRED PICARD.

## RAPPORTS.

**1. à 7. Rapports au Conseil de l'Université de Paris sur la situation de l'Enseignement supérieur,**

Rédigés par M. P. APPELL, en qualité de Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

U P R, 1902-1903, p. 87-123;—1903-1904, p. 91-105;—1904-1905, p. 81-101;—1905-1906, p. 69-81;—1906-1907, p. 91-110;—1907-1908, p. 77-95;—1908-1909, p. 125-143.

**8. La Réforme des Programmes d'admission aux Grandes Écoles.**

Rapport présenté par M. P. APPELL à la *Commission interministérielle des Grandes Écoles*, et approuvé par cette Commission dans sa séance du 7 juillet 1904.

E M, 6<sup>e</sup> a., 15 nov. 1904, p. 485-494.

Publié sous le titre *Rapport sur l'Enseignement dans la Classe de Mathématiques spéciales*: N A M, 4<sup>e</sup> s., t. 4, sept. 1904, p. 385-399.

Publié dans l'Ouvrage intitulé *Plans d'Études et Programmes d'Enseignement dans les Lycées et Collèges de Garçons*: Paris, D., in-12, p. 211-220.

Analyse par F. MÜLLER: J F M, Bd. 35, J. 1904, S. 97.

Analyse par TREUTLIN: J F M, Bd. 35, J. 1904, S. 98.

**9. Vœu relatif à l'Enseignement secondaire des Jeunes Filles.**

66

Ce vœu, qui fut adopté le 2 décembre 1904 par le Conseil académique de l'Université de Paris, a été présenté en 1906 par M. P. APPELL, d'accord avec M. GUSTAVE LANSON, à la Section permanente du Conseil supérieur de l'Instruction publique à la suite d'un Article de M. G. LANSON intitulé: *Les Femmes et l'Enseignement supérieur* (R B, 5<sup>e</sup> s., t. 5, 2 juin 1906, p. 676); mais ce vœu a été rejeté.



R I E, t. 52, 15 sept. 1906, p. 210-212.

**10 à 14. Relativement au Groupement des Universités et Grandes Écoles de France pour les Rapports avec l'Amérique latine:**

Article par MM. E. LEVASSEUR et P. APPELL: R I E, t. 55, 15 juin 1908, p. 566-567.

Circulaire rédigée au nom du Président du Groupement, M. LOUIS LIARD, Vice-Recteur de l'Académie de Paris, par les deux Vice-Présidents, MM. ÉMILE LEVASSEUR et PAUL APPELL, à la suite de la Réunion du 30 novembre 1908 au Collège de France; *Feuille* in-4, 4 p.

Rapport général sur le fonctionnement du Groupement par M. P. APPELL; R I E, t. 77, 15 fév. 1909, p. 113-116.

Programme: B B A, 1<sup>re</sup> a., n<sup>o</sup> 1, 5 juin 1910, p. 1-3.

Discours prononcé par M. P. APPELL, au nom du Groupement, à la Réception du maréchal DE FONSECA, Président de la République des États-Unis du Brésil, à la Sorbonne le 1<sup>er</sup> juillet 1910; R I E, t. 50, 15 sept. 1910, p. 200-202.

**15. Le statut des chefs de travaux et des préparateurs dans les Facultés des Sciences et les Écoles de Pharmacie.**

Exposé des motifs du projet de Décret qui sera soumis au Conseil supérieur en 1911.

R M, 1911.

## ARTICLES.

**1. Note sur la théorie du frottement de roulement.**

M. P. APPELL expose les raisons pour lesquelles la théorie classique du frottement de roulement lui paraît préférable à une théorie nouvelle proposée par J. BERTRAND (J S, 1895, p. 46).

B S M F, t. 23, 3 avr. 1895, p. 98-100.

**2. Sur les équations de l'Hydrodynamique et la théorie des tourbillons.**

J L, 5<sup>e</sup> s., t. 3, f. 1, 1897, p. 5-16.

Analyse par F. KÖTTER: J F M, Bd. 28, J. 1897, S. 681-682.

**3. Notion de l'infini en Géométrie élémentaire,**

A propos d'un Article de M. RIPERT.

E M, 2<sup>e</sup> a., 15 mai 1900, p. 205-206.

**4. Sur la classe de Mathématiques spéciales.**

E M, 2<sup>e</sup> a., 15 sept. 1900, p. 340-346.

**5. Faut-il supprimer le baccalauréat?**

R M, 2<sup>e</sup> a., t. 3, janv. 1907, p. 5-17.

**6. Les Sciences dans l'Éducation nationale.**

Id M, v. 1, n<sup>o</sup> 1, janv. 1909, p. 1-10.

**7. La Faculté des Sciences de l'Université de Paris de 1895 à 1910.**

*La Revue de Paris*, 17<sup>e</sup> a., 1<sup>er</sup> nov. 1910, gr. in-8, p. 98-120.

## SECTION VII.

## PUBLICATIONS DIVERSES.

## QUESTIONS PROPOSÉES. LEÇONS.

1 à 5. Questions proposées sur certaines intégrales algébriques;—sur la projection horizontale de la courbe décrite par l'extrémité d'un pendule sphérique;—sur la convergence d'une certaine série;—sur la tangente à la courbe  $y = f(x)$ , où  $f(x)$  est une fonction uniforme continue sans dérivée;—sur la recherche d'une certaine formule de la surface d'un polygone convexe inscriptible de  $n$  côtés.

I M, t. 1, 1894, p. 5;—t. 1, 1894, p. 67;—t. 1, 1894, p. 117-118 et t. 7, 1900, p. 75-76;—t. 4, 1897, p. 49;—t. 7, 1900, p. 115.

6. Question proposée en Algèbre supérieure.

N A M, 4<sup>e</sup> s., t. 1, juil. 1901, p. 335-336.—Voir Note n° 4, p. 38.

7. Question proposée en Géométrie analytique.

N A M, 4<sup>e</sup> s., t. 1, avr., juil. 1901, p. 192, 335-336.—Voir Note n° 20, p. 45.

8. Quantités complexes.

Rédaction de deux Leçons faites par M. P. APPELL à l'École Normale supérieure de l'Enseignement secondaire pour les Jeunes Filles, à Sèvres.

B A E S, janv.-avr. 1905, p. 25-29, 106-111.

## RAPPORTS.

69

1. Rapport sur un Mémoire de M. JEAN MASCART,

Intitulé *Constitution de l'anneau des petites planètes.*

C R, t. 128, 15 mai 1899, p. 1203-1205.

2. Rapport sur un Mémoire de M. TORRES QUEVEDO,

Intitulé *Machines à calculer.*

C R, t. 130, 2 avr. 1900, p. 874-876.

3. Rapport sur une Note de M. TORRES QUEVEDO,

Concernant un avant-projet de ballon dirigeable.

C R, t. 135, 21 juil. 1902, p. 141-146.

A B, 10<sup>e</sup> a., 9 sept. 1902, p. 212-215.

4. Rapport relatif à une proposition faite par l'Académie royale des Sciences de Madrid à l'Association Internationale des Académies,

Au sujet de l'adoption d'un *Système proposé par M. TORRES QUEVEDO pour la description symbolique des Machines.*

Feuille in-4, 8 avr. 1907, 2 p.

5. Sur l'application du Calcul des Probabilités.

Rapport fait par MM. DARBOUX, APPELL et POINCARÉ, sur l'Ordonnance du 18 avril 1904 de la *Cour de Cassation.*

E C C, t. III, 1909, p. 500-600.

## PRÉFACES. ANALYSES.

1. Préface d'un Ouvrage de M. G. PAPELIER,

Intitulé *Leçons sur les Coordonnées tangentielles.*

Paris, N., 1<sup>re</sup> P., 4 mars 1894, in-8; p. I-VI.—N A M, 3<sup>e</sup> s., t. 13, mai 1894, p. 202-206.

2. Préface de la traduction par J. GRIESS d'un Ouvrage de M. ALFRED GEORGE GREENHILL,

70

Intitulé *Les Fonctions elliptiques et leurs Applications (The Applications of elliptic Functions*, London, 1892, gr. in-8).

Paris, G. C., puis G.-V., 1895, 14 nov. 1894, gr. in-8, p. IX-XIV.

**3. Préface d'un Ouvrage de M. CHASSAGNY,**

Intitulé *Cours élémentaire de Physique*.

Paris, H., 1<sup>re</sup> éd., 1901; 5<sup>e</sup> éd. 1907; 22 août 1901; in-16, p. I-IV.

**4. Analyse d'un Ouvrage de M. MAURICE D'OCAGNE,**

Intitulé *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale*.

N A M, 3<sup>e</sup> s., t. 15, déc. 1896, p. 571-576.

**5. Analyse d'un Ouvrage de M. C. DE FREYCINET,**

Intitulé *De l'Expérience en Géométrie*.

J S, n. s., 1<sup>re</sup> a., juil. 1903, p. 361-365.

**6 à 16. Analyses de Thèses pour le grade de Docteur ès Sciences mathématiques,**

Présentées à la Faculté des Sciences de Paris, et intitulées:

*Sur le Mouvement d'un corps soumis à l'attraction newtonienne de deux corps fixes, et sur l'extension d'une propriété des mouvements képlériens* (1890), par J. ANDRADE.

R O, t. 1, 30 nov. 1890, p. 709.

*Sur les invariants de certaines classes d'équations différentielles homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées* (1890), par P. RIVEREAU.

R O, t. 1, 15 déc. 1890, p. 739.

*De la Symétrie courbe* (1891), par M.-S. MANGEOT.

R O, t. 2, 15 mars 1891, p. 147.

*Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues* (1891), par C. BOURLET.

R O, t. 2, 30 mai 1891, p. 338.

*Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de TAYLOR* (1892), par J. HADAMARD.

R O, t. 3, 30 juin 1892, p. 454.

*Sur l'intégration des équations différentielles linéaires* (1892), par E. VESSIOT.

R O, t. 4, 30 mars 1893, p. 191-192.

*Sur une question d'Hydrodynamique* (1893), par C. SAUTREAU.

R O, t. 5, 15 janv. 1894, p. 20.

*Application de la Méthode cinématique à l'étude des surfaces réglées, mouvement d'un corps solide assujéti à cinq conditions* (1894), par X. AN TOMARI.

R O, t. 5, 15 avr. 1894, p. 252.

1<sup>o</sup> *Sur des fonctions d'un point analytique à multiplicateurs exponentiels ou à périodes rationnelles;*—2<sup>o</sup> *Sur l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1895), \text{ par E. LACOUR.}$$

R O, t. 6, 30 avr. 1895, p. 387.

*Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince dont deux bords opposés au moins sont appuyés sur un cadre* (1900), par E. ESTANAVE.

R O, t. 12, 15 janv. 1901, p. 45.

*Calcul des Triquaternions* (1902), par G. COMBEBIAC.

R O, t. 13, 30 juin 1902, p. 583.

17. *Présentation à l'Académie des Sciences d'une Note de M. E. LEBON,*

Intitulée *Sur le Plan d'une Bibliographie analytique des Écrits contemporains sur l'Histoire de l'Astronomie.*

J O, 35<sup>e</sup> a., n<sup>o</sup> 137, 20 mai 1903, p. 3256.

(Le nombre des Écrits de M. PAUL APPELL est de 306.)

---

Paris.—Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

### Liste de Corrections

La première ligne indique le texte original, la deuxième le texte corrigé:

p. 22:

Généralités sur les fonctions une variable.

Généralités sur les fonctions d' une variable.

p. 65:

à 7. *Rapports au Conseil*

1. à 7. *Rapports au Conseil*

\*\*\* END OF THE PROJECT GUTENBERG EBOOK PAUL APPELL: BIOGRAPHIE,  
BIBLIOGRAPHIE ANALYTIQUE DES ÉCRITS \*\*\*

Updated editions will replace the previous one—the old editions will be renamed.

Creating the works from print editions not protected by U.S. copyright law means that no one owns a United States copyright in these works, so the Foundation (and you!) can copy and distribute it in the United States without permission and without paying copyright royalties. Special rules, set forth in the General Terms of Use part of this license, apply to copying and distributing Project Gutenberg™ electronic works to protect the PROJECT GUTENBERG™ concept and trademark. Project Gutenberg is a registered trademark, and may not be used if you charge for an eBook, except by following the terms of the trademark license, including paying royalties for use of the Project Gutenberg trademark. If you do not charge anything for copies of this eBook, complying with the trademark license is very easy. You may use this eBook for nearly any purpose such as creation of derivative works, reports, performances and research. Project Gutenberg eBooks may be modified and printed and given away—you may do practically ANYTHING in the United States with eBooks not protected by U.S. copyright law. Redistribution is subject to the trademark license, especially commercial redistribution.

START: FULL LICENSE  
THE FULL PROJECT GUTENBERG LICENSE  
PLEASE READ THIS BEFORE YOU DISTRIBUTE OR USE THIS WORK

To protect the Project Gutenberg™ mission of promoting the free distribution of electronic works, by using or distributing this work (or any other work associated in any way with the phrase “Project Gutenberg”), you agree to comply with all the terms of the Full Project Gutenberg™ License available with this file or

## **Section 1. General Terms of Use and Redistributing Project Gutenberg™ electronic works**

1.A. By reading or using any part of this Project Gutenberg™ electronic work, you indicate that you have read, understand, agree to and accept all the terms of this license and intellectual property (trademark/copyright) agreement. If you do not agree to abide by all the terms of this agreement, you must cease using and return or destroy all copies of Project Gutenberg™ electronic works in your possession. If you paid a fee for obtaining a copy of or access to a Project Gutenberg™ electronic work and you do not agree to be bound by the terms of this agreement, you may obtain a refund from the person or entity to whom you paid the fee as set forth in paragraph 1.E.8.

1.B. “Project Gutenberg” is a registered trademark. It may only be used on or associated in any way with an electronic work by people who agree to be bound by the terms of this agreement. There are a few things that you can do with most Project Gutenberg™ electronic works even without complying with the full terms of this agreement. See paragraph 1.C below. There are a lot of things you can do with Project Gutenberg™ electronic works if you follow the terms of this agreement and help preserve free future access to Project Gutenberg™ electronic works. See paragraph 1.E below.

1.C. The Project Gutenberg Literary Archive Foundation (“the Foundation” or PGLAF), owns a compilation copyright in the collection of Project Gutenberg™ electronic works. Nearly all the individual works in the collection are in the public domain in the United States. If an individual work is unprotected by copyright law in the United States and you are located in the United States, we do not claim a right to prevent you from copying, distributing, performing, displaying or creating derivative works based on the work as long as all references to Project Gutenberg are removed. Of course, we hope that you will support the Project Gutenberg™ mission of promoting free access to electronic works by freely sharing Project Gutenberg™ works in compliance with the terms of this agreement for keeping the Project Gutenberg™ name associated with the work. You can easily comply with the terms of this agreement by keeping this work in the same format with its attached full Project Gutenberg™ License when you share it without charge with others.

1.D. The copyright laws of the place where you are located also govern what you can do with this work. Copyright laws in most countries are in a constant state of change. If you are outside the United States, check the laws of your country in addition to the terms of this agreement before downloading, copying, displaying, performing, distributing or creating derivative works based on this work or any other Project Gutenberg™ work. The Foundation makes no representations concerning the copyright status of any work in any country other than the United States.

1.E. Unless you have removed all references to Project Gutenberg:

1.E.1. The following sentence, with active links to, or other immediate access to, the full Project Gutenberg™ License must appear prominently whenever any copy of a Project Gutenberg™ work (any work on which the phrase “Project Gutenberg” appears, or with which the phrase “Project Gutenberg” is associated) is accessed, displayed, performed, viewed, copied or distributed:

This eBook is for the use of anyone anywhere in the United States and most other parts of the world at no cost and with almost no restrictions whatsoever. You may copy it, give it away or re-use it under the terms of the Project Gutenberg License included with this eBook or online at [www.gutenberg.org](http://www.gutenberg.org). If you are not located in the United States, you will have to check the laws of the country where you are located before using this eBook.

1.E.2. If an individual Project Gutenberg™ electronic work is derived from texts not protected by U.S. copyright law (does not contain a notice indicating that it is posted with permission of the copyright holder), the work can be copied and distributed to anyone in the United States without paying any fees or charges. If you are redistributing or providing access to a work with the phrase “Project Gutenberg” associated with or appearing on the work, you must comply either with the requirements of paragraphs 1.E.1 through 1.E.7 or obtain permission for the use of the work and the Project Gutenberg™ trademark as set forth in paragraphs 1.E.8 or 1.E.9.

1.E.3. If an individual Project Gutenberg™ electronic work is posted with the permission of the copyright holder, your use and distribution must comply with

both paragraphs 1.E.1 through 1.E.7 and any additional terms imposed by the copyright holder. Additional terms will be linked to the Project Gutenberg™ License for all works posted with the permission of the copyright holder found at the beginning of this work.

1.E.4. Do not unlink or detach or remove the full Project Gutenberg™ License terms from this work, or any files containing a part of this work or any other work associated with Project Gutenberg™.

1.E.5. Do not copy, display, perform, distribute or redistribute this electronic work, or any part of this electronic work, without prominently displaying the sentence set forth in paragraph 1.E.1 with active links or immediate access to the full terms of the Project Gutenberg™ License.

1.E.6. You may convert to and distribute this work in any binary, compressed, marked up, nonproprietary or proprietary form, including any word processing or hypertext form. However, if you provide access to or distribute copies of a Project Gutenberg™ work in a format other than “Plain Vanilla ASCII” or other format used in the official version posted on the official Project Gutenberg™ website (www.gutenberg.org), you must, at no additional cost, fee or expense to the user, provide a copy, a means of exporting a copy, or a means of obtaining a copy upon request, of the work in its original “Plain Vanilla ASCII” or other form. Any alternate format must include the full Project Gutenberg™ License as specified in paragraph 1.E.1.

1.E.7. Do not charge a fee for access to, viewing, displaying, performing, copying or distributing any Project Gutenberg™ works unless you comply with paragraph 1.E.8 or 1.E.9.

1.E.8. You may charge a reasonable fee for copies of or providing access to or distributing Project Gutenberg™ electronic works provided that:

- You pay a royalty fee of 20% of the gross profits you derive from the use of Project Gutenberg™ works calculated using the method you already use to calculate your applicable taxes. The fee is owed to the owner of the Project Gutenberg™ trademark, but he has agreed to donate royalties under this paragraph to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation. Royalty payments must be paid within 60 days following each date on which you prepare (or are legally required to prepare) your periodic tax returns. Royalty payments should be clearly marked as such and sent to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation at the address specified in Section 4, “Information about donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation.”
- You provide a full refund of any money paid by a user who notifies you in writing (or by e-mail) within 30 days of receipt that s/he does not agree to the terms of the full Project Gutenberg™ License. You must require such a user to return or destroy all copies of the works possessed in a physical medium and discontinue all use of and all access to other copies of Project Gutenberg™ works.
- You provide, in accordance with paragraph 1.F.3, a full refund of any money paid for a work or a replacement copy, if a defect in the electronic work is discovered and reported to you within 90 days of receipt of the work.
- You comply with all other terms of this agreement for free distribution of Project Gutenberg™ works.

1.E.9. If you wish to charge a fee or distribute a Project Gutenberg™ electronic work or group of works on different terms than are set forth in this agreement, you must obtain permission in writing from the Project Gutenberg Literary Archive Foundation, the manager of the Project Gutenberg™ trademark. Contact the Foundation as set forth in Section 3 below.

1.F.

1.F.1. Project Gutenberg volunteers and employees expend considerable effort to identify, do copyright research on, transcribe and proofread works not protected by U.S. copyright law in creating the Project Gutenberg™ collection. Despite these efforts, Project Gutenberg™ electronic works, and the medium on which they may be stored, may contain “Defects,” such as, but not limited to, incomplete, inaccurate or corrupt data, transcription errors, a copyright or other intellectual property infringement, a defective or damaged disk or other medium, a computer virus, or computer codes that damage or cannot be read by your equipment.

1.F.2. LIMITED WARRANTY, DISCLAIMER OF DAMAGES - Except for the “Right of Replacement or Refund” described in paragraph 1.F.3, the Project Gutenberg

Literary Archive Foundation, the owner of the Project Gutenberg™ trademark, and any other party distributing a Project Gutenberg™ electronic work under this agreement, disclaim all liability to you for damages, costs and expenses, including legal fees. YOU AGREE THAT YOU HAVE NO REMEDIES FOR NEGLIGENCE, STRICT LIABILITY, BREACH OF WARRANTY OR BREACH OF CONTRACT EXCEPT THOSE PROVIDED IN PARAGRAPH 1.F.3. YOU AGREE THAT THE FOUNDATION, THE TRADEMARK OWNER, AND ANY DISTRIBUTOR UNDER THIS AGREEMENT WILL NOT BE LIABLE TO YOU FOR ACTUAL, DIRECT, INDIRECT, CONSEQUENTIAL, PUNITIVE OR INCIDENTAL DAMAGES EVEN IF YOU GIVE NOTICE OF THE POSSIBILITY OF SUCH DAMAGE.

1.F.3. LIMITED RIGHT OF REPLACEMENT OR REFUND - If you discover a defect in this electronic work within 90 days of receiving it, you can receive a refund of the money (if any) you paid for it by sending a written explanation to the person you received the work from. If you received the work on a physical medium, you must return the medium with your written explanation. The person or entity that provided you with the defective work may elect to provide a replacement copy in lieu of a refund. If you received the work electronically, the person or entity providing it to you may choose to give you a second opportunity to receive the work electronically in lieu of a refund. If the second copy is also defective, you may demand a refund in writing without further opportunities to fix the problem.

1.F.4. Except for the limited right of replacement or refund set forth in paragraph 1.F.3, this work is provided to you 'AS-IS', WITH NO OTHER WARRANTIES OF ANY KIND, EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO WARRANTIES OF MERCHANTABILITY OR FITNESS FOR ANY PURPOSE.

1.F.5. Some states do not allow disclaimers of certain implied warranties or the exclusion or limitation of certain types of damages. If any disclaimer or limitation set forth in this agreement violates the law of the state applicable to this agreement, the agreement shall be interpreted to make the maximum disclaimer or limitation permitted by the applicable state law. The invalidity or unenforceability of any provision of this agreement shall not void the remaining provisions.

1.F.6. INDEMNITY - You agree to indemnify and hold the Foundation, the trademark owner, any agent or employee of the Foundation, anyone providing copies of Project Gutenberg™ electronic works in accordance with this agreement, and any volunteers associated with the production, promotion and distribution of Project Gutenberg™ electronic works, harmless from all liability, costs and expenses, including legal fees, that arise directly or indirectly from any of the following which you do or cause to occur: (a) distribution of this or any Project Gutenberg™ work, (b) alteration, modification, or additions or deletions to any Project Gutenberg™ work, and (c) any Defect you cause.

## **Section 2. Information about the Mission of Project Gutenberg™**

Project Gutenberg™ is synonymous with the free distribution of electronic works in formats readable by the widest variety of computers including obsolete, old, middle-aged and new computers. It exists because of the efforts of hundreds of volunteers and donations from people in all walks of life.

Volunteers and financial support to provide volunteers with the assistance they need are critical to reaching Project Gutenberg™'s goals and ensuring that the Project Gutenberg™ collection will remain freely available for generations to come. In 2001, the Project Gutenberg Literary Archive Foundation was created to provide a secure and permanent future for Project Gutenberg™ and future generations. To learn more about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation and how your efforts and donations can help, see Sections 3 and 4 and the Foundation information page at [www.gutenberg.org](http://www.gutenberg.org).

## **Section 3. Information about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation**

The Project Gutenberg Literary Archive Foundation is a non-profit 501(c)(3) educational corporation organized under the laws of the state of Mississippi and granted tax exempt status by the Internal Revenue Service. The Foundation's EIN or federal tax identification number is 64-6221541. Contributions to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation are tax deductible to the full extent permitted by U.S. federal laws and your state's laws.

The Foundation's business office is located at 809 North 1500 West, Salt Lake City, UT 84116, (801) 596-1887. Email contact links and up to date contact

information can be found at the Foundation's website and official page at [www.gutenberg.org/contact](http://www.gutenberg.org/contact)

#### **Section 4. Information about Donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation**

Project Gutenberg™ depends upon and cannot survive without widespread public support and donations to carry out its mission of increasing the number of public domain and licensed works that can be freely distributed in machine-readable form accessible by the widest array of equipment including outdated equipment. Many small donations (\$1 to \$5,000) are particularly important to maintaining tax exempt status with the IRS.

The Foundation is committed to complying with the laws regulating charities and charitable donations in all 50 states of the United States. Compliance requirements are not uniform and it takes a considerable effort, much paperwork and many fees to meet and keep up with these requirements. We do not solicit donations in locations where we have not received written confirmation of compliance. To SEND DONATIONS or determine the status of compliance for any particular state visit [www.gutenberg.org/donate](http://www.gutenberg.org/donate).

While we cannot and do not solicit contributions from states where we have not met the solicitation requirements, we know of no prohibition against accepting unsolicited donations from donors in such states who approach us with offers to donate.

International donations are gratefully accepted, but we cannot make any statements concerning tax treatment of donations received from outside the United States. U.S. laws alone swamp our small staff.

Please check the Project Gutenberg web pages for current donation methods and addresses. Donations are accepted in a number of other ways including checks, online payments and credit card donations. To donate, please visit: [www.gutenberg.org/donate](http://www.gutenberg.org/donate)

#### **Section 5. General Information About Project Gutenberg™ electronic works**

Professor Michael S. Hart was the originator of the Project Gutenberg™ concept of a library of electronic works that could be freely shared with anyone. For forty years, he produced and distributed Project Gutenberg™ eBooks with only a loose network of volunteer support.

Project Gutenberg™ eBooks are often created from several printed editions, all of which are confirmed as not protected by copyright in the U.S. unless a copyright notice is included. Thus, we do not necessarily keep eBooks in compliance with any particular paper edition.

Most people start at our website which has the main PG search facility: [www.gutenberg.org](http://www.gutenberg.org).

This website includes information about Project Gutenberg™, including how to make donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation, how to help produce our new eBooks, and how to subscribe to our email newsletter to hear about new eBooks.